



Propagation des ondes sismiques dans les milieux multiphasiques hétérogènes : modélisation numérique, sensibilité et inversion des paramètres poroélastiques

Bastien Dupuy

► To cite this version:

Bastien Dupuy. Propagation des ondes sismiques dans les milieux multiphasiques hétérogènes : modélisation numérique, sensibilité et inversion des paramètres poroélastiques. Sciences de la Terre. Université de Grenoble, 2011. Français. NNT : 2011GRENU037 . tel-00657366

HAL Id: tel-00657366

<https://theses.hal.science/tel-00657366>

Submitted on 6 Jan 2012

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THÈSE

Pour obtenir le grade de

DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ DE GRENOBLE

Spécialité : **Géosciences, Terre Solide**

Arrêté ministériel : 7 août 2006

Présentée par

Bastien Dupuy

Thèse dirigée par **Jean Virieux**
et codirigée par **Stéphane Garambois**

préparée au sein de l' **Institut des Sciences de la Terre**
et de l'école doctorale **Terre Univers Environnement**

Propagation des ondes sismiques dans les milieux multiphasiques hétérogènes : modélisation numérique, sensibilité et inversion des paramètres poroélastiques

25 Novembre 2011 ,
devant le jury composé de :

Bruno Lombard

Chargé de recherche CNRS, Laboratoire de Mécanique et d'Acoustique, Marseille, Rapporteur

René-Edouard Plessix

Chercheur Senior, Shell, Pays-Bas, Rapporteur

Hélène Barucq

Directeur de recherche INRIA, Pau, Examinatrice

Michel Dietrich

Directeur de recherche CNRS, ISTerre, Université Joseph Fourier, Grenoble, Examineur

Claude Boutin

Ingénieur en chef, ENTPE, Lyon, Invité

Jean Virieux

Professeur, ISTerre, Université Joseph Fourier, Grenoble, Directeur de thèse

Stéphane Garambois

Maitre de Conférence, ISTerre, Université Joseph Fourier, Grenoble, Co-Directeur de thèse



Remerciements

Ces remerciements que vous lirez probablement juste après avoir lu le titre de ma thèse et juste avant de lire toutes ces digressions scientifiques, ont pourtant été écrit en dernier. C'est ainsi l'étape tant attendu, qui signifie la fin d'une aventure, d'une épopée... ou juste d'une thèse en fait. Le plan de cette partie sera le suivant : en première partie seront développés les remerciements scientifiques alors que la deuxième partie s'intéressera aux reconnaissances d'ordre personnelles.

Merci à mes directeurs de thèse, Stéphane et Jean, qui m'ont initié au monde de la recherche, qui m'ont encadré pendant plus de trois ans afin de mener à bien cette thèse grâce à leur disponibilité, leurs encouragements et motivations diverses et surtout grâce à leurs grandes compétences scientifiques et humaines. Merci également à tous les membres du jury, Bruno, René-Edouard, Hélène, Michel et Claude, qui ont accepté de juger mon travail et de me faire part de leurs remarques fortes intéressantes et constructives.

Merci aussi à toutes les personnes qui m'ont particulièrement aidé, par exemple Louis et Romain qui n'ont jamais rechigné à répondre à mes questions techniques et parfois naïves, et ceux avec qui j'ai pu collaborer, étudiants du "groupe imagerie sismique" de Grenoble et Nice (Aurélien, Amir, François, Hui, Vincent(s), Damien, Yaser...) et chercheurs (Stéphane, Alessandra, Frédéric, Tiziana, Bruno et Guillaume...). Merci aux chercheurs qui ont accepté de me trainer sur le terrain, à Naples (Philippe, Jean, Olivier...), sur le glacier d'Argentière ou à Roselend (Andrea, Nathalie...) et même à Saint Martin le Vinoux (Stéphane, Agnès...). Merci à tous les chercheurs, ingénieurs, techniciens et équipes administratives que j'ai pu côtoyer au sein du laboratoire et qui m'ont aidé à résoudre tout un tas de petits problèmes scientifiques ou administratifs.

Enfin, des remerciements s'imposent également pour tous les doctorants et stagiaires du laboratoire que j'ai pu croiser pendant ces trois ans, que ce soit les autres thésards cru 2011 (Agathe, Violaine, Bérénice, Romain, Mathilde, Soumaya et bientôt Dimitri, Diane et Aurélien) ou les "petits jeunes" (Aurore, Matthieu, Guénolé, Mathilde, Thomas, JPP...). Pour aller manger à l'heure où certains se lèvent, pour aller boire un coup en sortant du labo, pour aller skier ou grimper, pour comprendre comment marche la physique, fortran, latex ou matlab, il y avait toujours des gens disponibles, merci.

Ensuite, mes remerciements s'adressent à mes parents, mon frère et ma famille qui m'ont bien soutenu, à Sandrine qui m'a supporté pendant la fin de la rédaction de ce manuscrit, à mes colocataires qui ont tenté de me supporter aussi et à tous les amis avec qui j'ai pu m'adonner à mes deux grandes passions, le tricot et la belote : Boris, Laurent, Simon, Antoine, Thomas, Pauline, Dorine, Anouck, Arthur...

Merci à tous et bonne lecture

Résumé

La propagation des ondes sismiques dans les milieux poreux multiphasiques présente des enjeux nombreux, tant sur le plan environnemental (risques naturels, géotechnique, pollutions de nappes...) que pour les réservoirs (aquifères, hydrocarbures, stockages de CO_2 ...). L'utilisation des ondes sismiques pour étudier ces milieux se justifie par le fait qu'en se propageant, les ondes sont déformées par le milieu qu'elles traversent et contiennent ainsi des informations sur les phases fluides et solides et sur le squelette poreux. Ce travail de thèse s'intéresse aux caractéristiques des ondes sismiques dans les milieux multiphasiques (plusieurs phases fluides et solides), depuis la description physique jusqu'à la caractérisation des paramètres constitutifs par inversion, en passant par la modélisation numérique 2D de la propagation. La première partie du travail a consisté à décrire la physique des milieux multiphasiques (phase par phase et leurs interactions dynamiques) en utilisant des méthodes d'homogénéisation pour se ramener à un milieu équivalent défini par sept paramètres. Ainsi, dans des milieux simple porosité saturés et dans des milieux plus complexes (double porosité, partiellement saturés ou viscoporoélastiques), je peux calculer la propagation des ondes sismiques sans approximation. En effet, j'utilise une méthode numérique dans le domaine fréquence-espace qui permet de prendre en compte tous les termes qui dépendent de la fréquence sans approximation. La discrétisation spatiale utilise une méthode d'éléments finis discontinus (Galerkin discontinu) qui permet de considérer des milieux hétérogènes.

Je montre notamment que les attributs sismiques (vitesses et atténuations) des milieux poreux complexes sont fortement dispersifs et les formes d'ondes complètes, calculées sans approximation, sont fortement dépendantes de la description physique du milieu. La caractérisation des paramètres poroélastiques s'effectue par inversion. Une méthode en deux étapes a été proposée : la première consiste en une inversion "classique" (tomographie, inversion des formes d'ondes complètes) des données (sismogrammes) pour obtenir des paramètres macro-échelles (attributs sismiques). La seconde étape permet de reconstruire, à partir des paramètres macro-échelles, les paramètres poroélastiques micro-échelles. Cette étape d'inversion utilise une méthode d'optimisation semi-globale (algorithme de voisinage). Une analyse de sensibilité montre qu'en connaissant a-priori certains paramètres, on peut inverser avec précision les paramètres du squelette poroélastique ou retrouver la nature du fluide saturant, à partir des vitesses de propagation. En revanche, pour retrouver la saturation en fluide, il est préférable de connaître les atténuations. Deux applications réalistes (monitoring de réservoir et hydrogéophysique) mettent en oeuvre ce type d'inversion en deux étapes et démontrent qu'à partir de données estimées par des méthodes classiques d'imagerie, on peut remonter à certains paramètres poroélastiques constitutifs.

Mots-clés : propagation d'ondes sismiques, milieux multiphasiques, poroélasticité, modélisation numérique, optimisation globale, inversion des paramètres poroélastiques

Abstract

Seismic wave propagation in multiphase porous media have various environmental (natural risks, geotechnics, groundwater pollutions...) and resources (aquifers, oil and gas, CO₂ storage...) issues. When seismic waves are crossing a given material, they are distorted and thus contain information on fluid and solid phases. This work focuses on the characteristics of seismic waves propagating in multiphase media, from the physical complex description to the parameter characterisation by inversion, including 2D numerical modelling of the wave propagation. The first part consists in the description of the physics of multiphase media (each phase and their interactions), using several upscaling methods, in order to obtain an equivalent mesoscale medium defined by seven parameters. Thus, in simple porosity saturated media and in complex media (double porosity, patchy saturation, visco-poroelasticity), I can compute seismic wave propagation without any approximation. Indeed, I use a frequency-space domain for the numerical method, which allows to consider all the frequency dependent terms. The spatial discretisation employs a discontinuous finite elements method (discontinuous Galerkin), which allows to take into account complex interfaces.

The computation of the seismic attributes (velocities and attenuations) of complex porous media shows strong variations in respect with the frequency. Waveforms, computed without approximation, are strongly different if we take into account the full description of the medium or an homogenisation by averages. The last part of this work deals with the poroelastic parameters characterisation by inversion. For this, I develop a two-steps method : the first one consists in a classical inversion (tomography, full waveform inversion) of seismograms data to obtain macro-scale parameters (seismic attributes). The second step allows to recover, from the macroscale parameters, the poroelastic micro-scale properties. This downscaling step uses a semi-global optimisation method (neighbourhood algorithm), which allows the sampling of the full model space (thanks to the low numerical cost of the analytic direct model). With the a-priori knowledge of some parameters, a sensibility analysis shows that I can invert precisely skeleton parameters or the saturating fluid type, from the velocities only. Nevertheless, to recover the fluid saturation, it is preferable to use the attenuations. This two-steps procedure is tested on two realistic applications (reservoir monitoring and subsurface hydrogeophysics) and show that we can recover some constitute poroelastic parameters.

Keywords : wave propagation, multiphase media, poroelasticity, numerical modelling, downscaling, global optimization, porous parameters inversion.

Table des matières

Introduction générale	13
1 Milieux biphasiques : description physique	21
1.1 Propagation des ondes sismiques dans les milieux biphasiques	22
1.1.1 Elastodynamique	22
1.1.2 Poroélastodynamique : théorie de Biot-Gassmann	24
1.2 Phase fluide (K_f , ρ_f et η)	32
1.3 Phase solide = grains (K_s , G_s et ρ_s)	32
1.4 Milieu drainé = matrice solide	33
1.4.1 Porosité (ϕ)	34
1.4.2 Perméabilités (k_0 et $k(\omega)$)	35
1.4.3 Modules mécaniques (K_D et G_D)	37
1.4.3.1 Matériaux non consolidés	38
1.4.3.2 Matériaux consolidés	40
1.5 Milieu poreux = milieu drainé + phase fluide	41
1.5.1 Termes inertiels (ρ_f , ρ et $\tilde{\rho}(\omega)$)	41
1.5.2 Modules mécaniques du milieu poreux (K_U , G , C et M)	42
1.5.3 Relations de Gassmann (1951)	43
1.5.4 Autres théories d'homogénéisation en approximation basse fréquence . .	45
2 Modélisation numérique de la propagation	49
2.1 Méthode Galerkin discontinue en fréquence	50
2.1.1 Résumé	50
2.1.2 Introduction	51
2.1.3 Equations de la poroélasticité	53
2.1.3.1 Homogénéisation des milieux poreux	53
2.1.3.2 Théorie de Biot	54
2.1.3.3 Lentours des ondes	55
2.1.3.4 Homogénéisation des paramètres	55
2.1.4 Méthode Galerkin discontinue dans le domaine fréquence-espace	57
2.1.4.1 Approche fréquence-espace	57
2.1.4.2 Formulation Galerkin discontinue	57
2.1.5 Aspects numériques	59
2.1.5.1 Stratégie de maillage	60
2.1.5.2 Conditions de bord absorbantes : PML	61
2.1.5.3 Estimation du coût numérique	65

TABLE DES MATIÈRES

2.1.5.4	Implémentation de la source	65
2.1.6	Validation des trois régimes de l'onde de Biot : cas d'une interface plane entre deux milieux	67
2.1.7	Milieu variable latéralement	70
2.1.8	Conclusion	75
2.1.9	Remerciements	75
2.1.10	Annexe A : matrices de projection	75
2.2	Surface libre et ondes de surface	77
2.2.1	Implémentation numérique	77
2.2.2	Validation et exemples de simulations d'ondes de surface	78
2.2.2.1	Validation de l'implémentation de la surface libre	78
2.2.2.2	Influence de l'onde de Biot sur les ondes de surface	82
3	Milieux complexes : attributs et formes d'ondes	89
3.1	Atténuations mésoscopiques	90
3.2	Formalisme général de l'homogénéisation des milieux complexes	93
3.3	Milieux à fluides multiphasiques	93
3.3.1	Modèles de saturation partielle : "patchy saturation"	93
3.3.2	Homogénéisation des phases fluides par moyennes	96
3.3.3	Influence de la saturation partielle sur les vitesses et atténuations des ondes	100
3.3.4	Influence de la saturation partielle sur les formes d'ondes	106
3.4	Milieux double porosité	109
3.4.1	Modèles double porosité	109
3.4.2	Homogénéisation par moyennes	111
3.4.3	Influence de la double porosité sur les vitesses et atténuations des ondes	111
3.4.4	Influence de la double porosité sur les formes d'ondes	118
3.5	Milieux visco-poroélastiques	122
3.5.1	Analogies visco-élastiques	122
3.5.2	Influence des modèles visco-poroélastiques sur les vitesses et atténuations des ondes	124
3.5.3	Influence des modèles visco-poroélastiques sur les formes d'ondes	129
3.5.3.1	Fréquences sismiques	129
3.5.3.2	Hautes fréquences	132
4	Inversion des paramètres poroélastiques par optimisation globale	135
4.1	Inversion des paramètres poroélastiques par "downscaling"	137
4.2	Méthodes d'optimisation globale	140
4.3	Sensibilité des paramètres poroélastiques	142
4.3.1	Inversion de tous les paramètres en milieux saturés	143
4.3.2	Inversion des paramètres du squelette en milieux saturés	151
4.3.3	Inversion du type de fluide saturant (milieux saturés)	152
4.3.4	Inversion de la saturation et des paramètres du squelette (milieux non saturés)	160
4.3.5	Conclusion sur la sensibilité des paramètres poroélastiques	165
4.4	Applications synthétiques	167
4.4.1	Monitoring de réservoir	167
4.4.1.1	Description du modèle	167

4.4.1.2	Inversions acoustiques et downscaling pour le modèle de base .	173
4.4.1.3	Inversions élastiques et downscaling pour le modèle de base . .	174
4.4.1.4	Inversions acoustiques et downscaling pour le modèle après injection	174
4.4.1.5	Conclusion sur le modèle de réservoir	176
4.4.2	Application hydrogéophysique de subsurface	177
4.4.2.1	Description du modèle	177
4.4.2.2	Tomographie des temps de premières arrivées et downscaling .	181
4.4.2.3	Apport des données de vitesses et des ondes S et des atténuations sur le downscaling	184
4.4.2.4	Interprétation des données réelles	186
Conclusions et perspectives		193
A Développement des interpolations d'ordre P_k		213
A.1	Rappel des équations de la poroélastodynamique : système 2D P-SV en fréquence	213
A.2	Discretisation spatiale par éléments finis discontinus	215
A.2.1	Flux centrés	218
A.2.2	Vecteurs de base et matrices de masse locales	220
A.2.3	Système tensoriel	222
A.2.4	Système générique	223
A.2.5	Système matriciel linéaire	225
A.2.6	Détail des termes du système linéaire, ordre P_0	226
A.2.7	Développement des matrices de forme, ordre P_1	229
B Publication complémentaire		231
B.1	Using a poroelastic theory to reconstruct subsurface properties : numerical investigation	232

Introduction générale

La planète Terre, de forme plus ou moins sphérique, est composée d'un ensemble d'enveloppes s'imbriquant les unes dans les autres. Si nous pouvons facilement explorer les enveloppes externes (atmosphère, biosphère, hydrosphère) de part leur accessibilité et leur nature, les couches "internes" sont beaucoup plus difficiles à conceptualiser et à étudier. Les premiers scientifiques grecs cherchaient à visualiser et à comprendre ce qui se passait dans l'espace alors qu'ils considéraient les manifestations de la planète (séismes) comme des interventions divines. Il a fallu attendre le milieu du *XIX^e* siècle pour voir apparaître les premières études scientifiques sur les tremblements de terre. Ainsi, les couches internes de la Terre (lithosphère, manteau, noyau) ont commencé à être examinées via la sismologie. En effet, pour comprendre comment sont structurées les enveloppes internes de la Terre et ce, à grande échelle, les méthodes non invasives de la géophysique sont les plus accessibles, étant plus rapides et plus globales (moins ponctuelles) que des forages (le forage le plus profond réalisé actuellement se situe sur la péninsule de Kola en Russie et atteint un peu plus de 12 km de profondeur). Ainsi, en s'appuyant sur des théories physiques, à partir d'enregistrements d'observables par des capteurs en surface, le but de ces méthodes est d'obtenir des images des paramètres constitutifs de la lithosphère par voie indirecte.

Les phénomènes physiques étudiés et donc, les observables de la géophysique, sont variables : ondes sismiques ou électromagnétiques, champs gravimétriques ou magnétiques, phénomènes électriques... Pour chaque cas, la physique est différente et les paramètres peuvent être divers. De plus, les échelles d'investigation (des phénomènes de proche surface à ceux concernant la Terre globale) présentent une variabilité importante qui conditionne les observables utilisées. L'estimation des paramètres constitutifs de la Terre permet de remonter aux caractéristiques des formations géologiques et par analyse de l'extension spatiale des valeurs obtenues, on peut reconstruire des images des structures géologiques à différentes échelles. Aux échelles de la Terre globale, l'interprétation de l'assemblage des structures géologiques mène directement à des considérations géodynamiques. Ces mouvements de la Terre interne, à grande échelle, spatiale et temporelle, sont la source de la tectonique active et donc des séismes.

Dans cette thèse, j'utilise les ondes sismiques comme phénomène physique permettant de remonter aux paramètres physiques du sous-sol. Les ondes sismiques ont des sources naturelles, ce sont les nombreux séismes qui ont lieu chaque jour plus ou moins profondément dans la lithosphère, ainsi que des sources de surface, naturelles (interactions avec l'hydrosphère ou l'atmosphère) ou anthropiques (voulues ou non). Les ondes mécaniques qui se propagent dans le globe, depuis la source aux récepteurs (accéléromètres ou vélocimètres, situés en surface ou en forage), sont déformées par le milieu qu'elles traversent et constituent donc un proxy idéal pour déterminer les structures internes de la Terre.

Je vais m'intéresser aux milieux de subsurface qui sont particulièrement hétérogènes et

complexes. Les paramètres constitutifs qui influent sur la propagation des ondes sismiques sont nombreux et variés, celle-ci étant sensible aux modules mécaniques du milieu mais également à la structure de ce milieu à petite échelle.

Les milieux poreux : méthodes géophysiques et applications

Dans la plupart des formations géologiques de subsurface, des processus d'érosion, d'altération, de transport, de sédimentation puis de diagénèse rendent ces milieux très complexes et hétérogènes, avec des sols et des roches de nature et de caractéristiques variées. Ainsi, de part cette hétérogénéité, associée à une faible consolidation (faibles contraintes lithostatiques), beaucoup de milieux de subsurface présentent des vides et ces pores sont remplis de fluides variés. La présence de fluides va modifier les caractéristiques mécaniques globales, via le type de fluide (qui a des caractéristiques mécaniques propres), sa quantité et sa répartition spatiale (dépendants de la porosité) et sa capacité d'écoulement (liée à la perméabilité).

Sur les premières centaines de mètres de la lithosphère, ces milieux présentent des enjeux sociétaux majeurs : humains, économiques, environnementaux et scientifiques. Les ressources en eau provenant des nappes aquifères plus ou moins profondes (et les risques de pollution de ces nappes), les problèmes de risques naturels (glissements de terrain, failles actives, liquéfaction des sols, retrait-gonflement des argiles...), les ressources en hydrocarbures (pétrole et gaz), les stockages profonds (CO_2 , déchets radioactifs...) ainsi que des phénomènes naturels (systèmes hydrothermaux, mouvements de magma et de gaz dans les édifices volcaniques...) sont autant d'applications mettant en jeu des milieux poreux multiphasiques.

Parmi les méthodes géophysiques utilisées pour caractériser les milieux biphasiques, les méthodes électromagnétiques (GPR, "Ground Penetrating Radar" ou CSEM, "Controlled Source ElectroMagnetic") sont intéressantes car les observables sont directement reliées aux caractéristiques des fluides, mais elles présentent des problèmes de profondeur de pénétration, d'ambiguïtés d'interprétation et/ou de résolution. Des méthodes comme la RMP (Résonance Magnétique Protonique, Legchenko *et al.* (2002)) permettant d'avoir une approche quantitative directe pour les applications hydrologiques, ou comme la polarisation spontanée (Reynolds, 1997), qui permet d'identifier les écoulements, sont des méthodes dédiées à la caractérisation géophysique des fluides, mais qui ont une faible résolution. L'étude des conversions sismo-électromagnétiques peut également fournir des informations intéressantes sur les milieux poreux (Garambois & Dietrich, 2002). Comme il sera démontré dans cette thèse, grâce à la forte sensibilité des ondes sismiques aux fluides, l'auscultation sismique se révèle être une des meilleures méthodes pour scruter la complexité multiphasique de ces milieux.

En effet, pour les ondes sismiques, qui se propagent par mouvement et interactions mécaniques des particules, le sous-sol est un milieu translucide qui a un effet de filtre ou de fonction de transfert. En se propageant, les ondes se diffractent, se réfléchissent, se convertissent, et en quelque sorte "enregistrent" les caractéristiques du milieu dans lequel elles ont voyagé. À partir des sismogrammes, on peut donc envisager reconstruire la structure du milieu traversé et quantifier les paramètres constitutifs de ce milieu. Cependant, les milieux terrestres sont complexes et hétérogènes et l'interprétation est souvent mal aisée et incomplète. Souvent, on se contente d'expliquer uniquement les temps d'arrivées des premières ondes (réfraction, tomographie), de mesurer l'amplitude de certaines ondes réfléchies (analyses AVO) ou d'inverser la dispersion des ondes de surface. Plus récemment, la prise en compte des formes d'ondes complètes a permis

d'obtenir des résultats de plus haute résolution et une meilleure quantification de certains paramètres. Mais les études se limitent au mieux à une approximation élastique et le plus souvent acoustique. Pourtant, on verra dans ces travaux que l'influence des fluides et de l'encaissant (phases solides et fluides) sur la propagation des ondes sismiques est cruciale car cette influence est variable en nature et en amplitude. D'autre part, la description physique n'est jamais parfaite et les modèles sont souvent cas-dépendants. Ainsi, le mélange d'explorations théoriques et numériques associées aux études des données réelles, de terrain et de laboratoire, est nécessaire pour bien comprendre tous les phénomènes.

Propagation d'ondes complètes sans approximation

Dans cette thèse, le premier aspect vise à correctement simuler numériquement la propagation des ondes sismiques dans les milieux biphasiques hétérogènes. Les difficultés sont nombreuses, depuis le besoin d'une description physique conforme, jusqu'à l'utilisation d'une méthode numérique permettant de faire le moins d'approximations possibles.

En effet, par l'introduction des phases fluides dans le milieu solide, on ajoute un niveau de complexité à la description du milieu. D'autre part, si de la façon la plus simple, on considère un milieu solide homogène et isotrope, saturé par un seul fluide, les milieux réels sont souvent plus complexes et la description doit alors être plus évoluée en tenant compte de phases fluides biphasiques, de squelettes solides double porosité ou visco-élastiques... Je montrerai dans cette étude que cette complexification des modèles est décisive pour correctement simuler la réalité.

D'autre part, la simulation de la propagation des ondes sismiques doit utiliser des méthodes numériques adaptées. Dans cette thèse, je souhaite modéliser la propagation dans des milieux hétérogènes et multiphasiques et ce, sans approximation. En effet, les modèles physiques qui décrivent ce type de milieu incluent des paramètres fréquemment dépendants qui vont avoir une influence non négligeable sur les formes d'ondes calculées. Ainsi, le choix du domaine de simulation est crucial. Dans un domaine temporel, comme utilisé classiquement pour les modélisations acoustiques ou élastiques, la prise en compte des phénomènes fréquentiels est sujet à des approximations (basse fréquence) ou oblige à considérer des pas de temps très petits et donc, une complexité et un coût numérique prohibitif. Le choix s'est donc naturellement porté sur une modélisation dans le domaine fréquence-espace.

Ensuite, la discrétisation spatiale peut être abordée par de nombreuses méthodes : différences finies, éléments finis, éléments spectraux... Les méthodes d'éléments finis discontinus (ou Galerkin Discontinu) proposent une alternative intéressante par leur forte adaptivité (les ordres d'interpolations et les tailles des éléments peuvent être variables dans un même modèle) et permettent de considérer des interfaces (entre couches, surface libre, fractures...) de géométries complexes. Au final, les erreurs inhérentes à la modélisation numérique ne dépendent que de la discrétisation spatiale, le modèle physique exact, y compris les aspects fréquentiels, étant décrit sans approximation.

Caractérisation des paramètres poroélastiques par inversion et "downscaling"

Après la description physique des milieux poroélastiques et la simulation de la propagation des ondes dans ces milieux, je me suis intéressé à des méthodes d'inversion des paramètres constitutifs. En effet, la compréhension de l'influence du modèle physique sur les formes d'ondes donne un aperçu des possibilités de caractérisation des paramètres poreux micro-échelles à partir des données macro-échelles extraites des sismogrammes. Par des études de sensibilité, on peut ainsi déterminer les relations et les degrés d'influence des paramètres micro-échelles sur les données macro-échelles afin de mieux orienter les méthodes d'inversion.

Classiquement, l'imagerie sismique réalise l'inversion de certaines caractéristiques des sismogrammes (temps des premières arrivées, amplitude des ondes réfléchies, formes d'ondes complètes...) pour obtenir des images des paramètres macro-échelles (vitesses de propagation, atténuations, coefficients de réflexion...). Ces paramètres macro-échelles permettent de caractériser les structures géologiques du milieu mais échouent à quantifier précisément les paramètres poroélastiques micro-échelles, comme les caractéristiques du fluide. Pour passer de cette échelle macroscopique à l'échelle microscopique de définition du milieu poreux, une étape supplémentaire de "downscaling" a été développée en s'appuyant sur les relations analytiques de modélisation physique du milieu biphasique. Contrairement aux inversions macroscopiques qui utilisent des méthodes d'optimisations locales linéarisées, le modèle direct est rapide et peu coûteux numériquement. On peut donc utiliser des méthodes d'optimisation semi-globales non linéaires, afin de bien échantillonner l'espace des modèles et de converger vers le minimum global. De plus, les études de sensibilité aident à déterminer quels paramètres poroélastiques sont inversibles, en fonction de quelles données.

Contexte de la thèse : projet ANR HPPP-CO₂

Le projet HPPP-CO₂ (High Pulse Poroelasticity Protocol for Geophysical Monitoring of CO₂ Injection in Reservoirs), dans lequel s'inscrit ma thèse, vise à développer un nouveau protocole pour caractériser les propriétés hydrauliques et mécaniques des roches réservoirs avant et après injection du CO₂, à une échelle mésoscopique. Pour cela, une sonde (voir figure 1) fournissant une injection de pression impulsionnelle est placée en forage et des mesures de pression et de déformations 3D en champ proche sont réalisées sur une large bande fréquentielle (entre 0 et 1000 Hz). Le but du projet est d'analyser tous les comportements de couplage thermo-hydro-mécaniques pour mieux comprendre la réponse du milieu poreux sur une large bande fréquentielle. Une grande part du projet s'intéresse à l'aspect hydro-mécanique statique. Mon travail s'inscrit dans l'aspect dynamique, où l'enregistrement des ondes sismiques générées par la source de pression fluide, en champ proche et en champ plus lointain (capteurs en forages à une dizaine de mètres), permettra de mieux caractériser le milieu. Toute la problématique réside dans l'estimation de la source d'un point de vue spatial et temporel, afin d'améliorer les méthodes d'imagerie sismique haute résolution en couplant mesures en champ proche et en champ lointain.

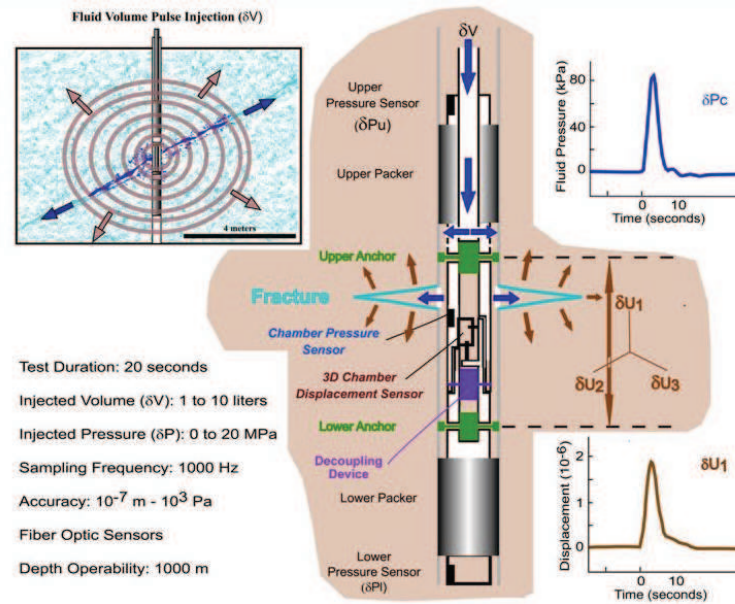


FIGURE 1 – Fonctionnement de la sonde HPPP. L’encart en haut à gauche situe le contexte et l’échelle d’investigation (injection de fluide dans un milieu poreux fracturé et mesures en champ proche de la réponse du milieu).

Plan et enjeux de la thèse

La logique de mes travaux est résumée par la figure 2 qui reprend sous forme schématique les différentes étapes étudiées qui correspondent aux quatre chapitres. Dans le chapitre 1, la description physique complète des milieux biphasiques sera détaillée ainsi que la théorie de la propagation des ondes sismiques de Biot (1956); Gassmann (1951). Par association des grains des minéraux en un squelette solide puis après ajout de la phase fluide saturante, je définis un milieu équivalent, décrit par sept paramètres, dont un seul dépend de la fréquence (décrivant les interactions entre phases fluide et solide). Les autres paramètres sont des modules mécaniques (incompressibilité ou cisaillement) ou des termes inertiels. Le passage des nombreux paramètres micro-échelles décrivant le milieu poreux à une échelle microscopique à des paramètres méso-échelles (longueur d’onde) suit une logique d’homogénéisation (“upscaling”). Cette étape d’homogénéisation peut être adaptée à des modèles physiques complexes, c’est ce qui sera abordée dans le chapitre 3.

Dans le chapitre 2, je développe la méthode numérique utilisée pour résoudre les équations différentielles du système de la poroélastodynamique dans ce milieu méso-échelle homogénéisé. J’utilise une méthode Galerkin Discontinue, présentant un haut niveau d’adaptivité (tailles des éléments et ordres d’interpolations variables), dans le domaine fréquence-espace, ce qui permet de prendre en compte, sans approximation, la rhéologie fréquemment dépendante des milieux poreux. Après validation du code numérique et l’introduction d’exemples de simulations réalistes (monitoring de réservoir), l’influence des pertes d’énergie dues aux ondes spécifiques aux milieux poreux (seconde onde de compression) sur les ondes S et sur les ondes de surface sera examinée.

Le chapitre 3 permettra d’étendre les descriptions physiques des milieux poreux à des cas

plus réalistes. En effet, la modélisation analytique utilisée dans le chapitre 1, et fondée sur les relations de Biot-Gassmann, se limite aux milieux avec une phase solide homogène et isotrope avec des pores saturés par une seule phase fluide. Pour expliquer au mieux les atténuations et les dispersions des ondes observées dans les milieux poreux réels, il faut utiliser des modèles plus complexes et prendre en compte, par exemple, des milieux à phase fluide biphasique ou des milieux double porosité. D'autre part, les fortes atténuations observées sur les données réelles peuvent également être modélisées en rajoutant des termes visco-élastiques dans les équations de propagation. La prise en compte de ces modèles complexes se fait via des modules mécaniques dépendants de la fréquence et aboutit à une théorie de Biot-Gassmann généralisée. La modélisation de la propagation en domaine fréquentiel prend alors tout son sens. Je montrerai dans ce chapitre quelle est l'influence de ces descriptions complexes sur les paramètres macro-échelles et sur les formes d'ondes. La comparaison de ces descriptions avec les homogénéisations classiques par moyennes sera également examinée afin de montrer toute l'utilité de ces modèles pour la bonne compréhension des phénomènes naturels.

Enfin, le chapitre 4 traitera d'une méthode de caractérisation des paramètres poroélastiques à partir des données macro-échelles obtenues par inversion sismique "classique". En effet, par une méthode d'optimisation semi-globale (algorithme de voisinage), la sensibilité des paramètres poroélastiques à l'inversion sera déterminée suivant la paramétrisation et le choix des données macro-échelles. Pour deux exemples synthétiques réalistes (monitoring de réservoir et application hydrogéophysique de subsurface), des données poroélastiques seront calculées et, par une première étape d'inversion (tomographie des temps des d'arrivées ou inversion des formes d'ondes complètes), des cartes spatiales de paramètres macro-échelles (vitesses de propagation des ondes P et S) seront établies. Ensuite, dans une seconde étape d'inversion (downscaling), je remonterai à des cartes de paramètres poroélastiques, notamment ceux caractérisant le squelette solide et les phases fluides. Un exemple d'inversion de données réelles montrera quelle résolution est envisageable suivant la connaissance a-priori du milieu.

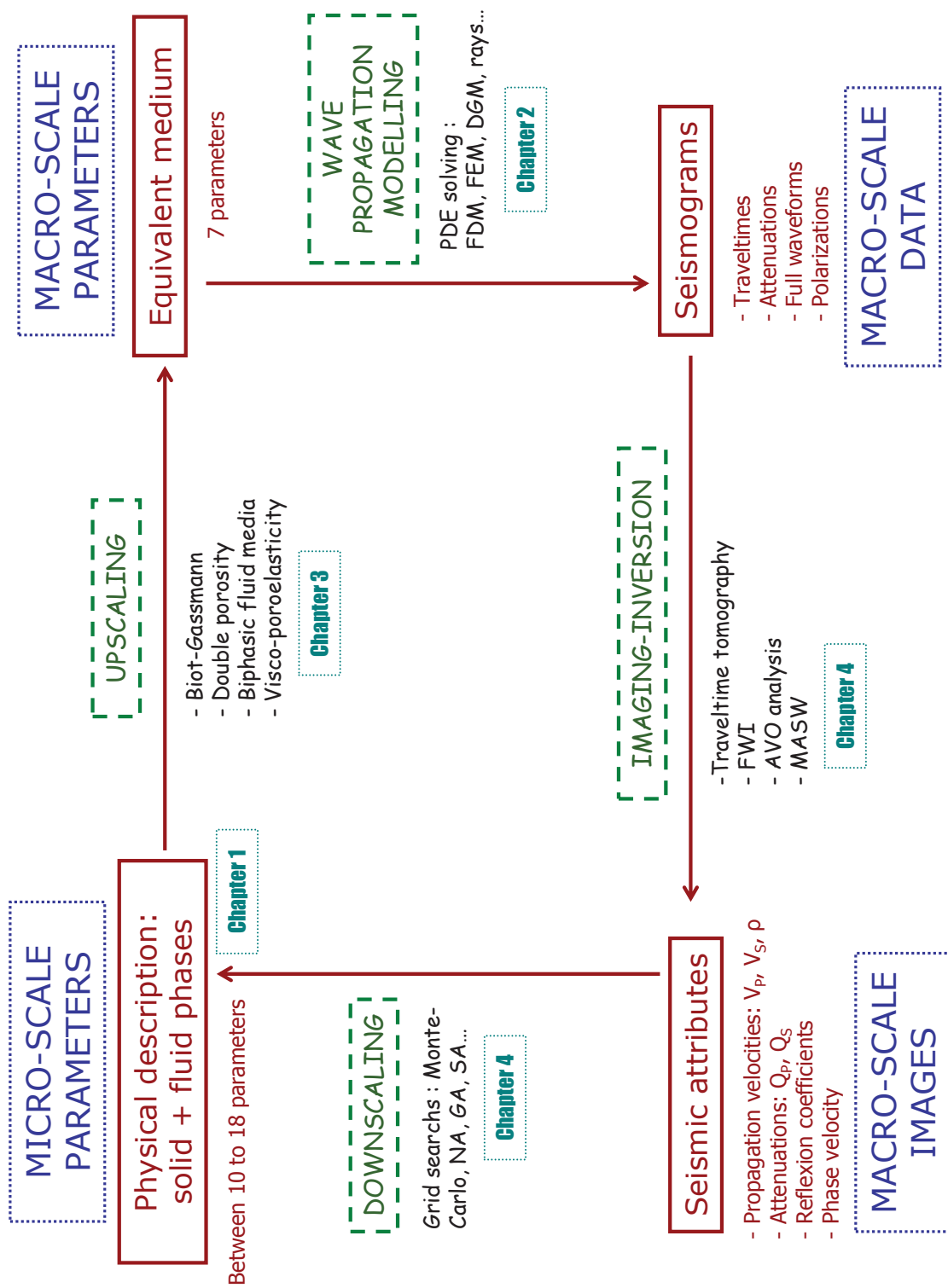


FIGURE 2 – Représentation schématique de l'organisation de la thèse

Chapitre 1

Milieux biphasiques : description physique

Sommaire

1.1	Propagation des ondes sismiques dans les milieux biphasiques . .	22
1.1.1	Elastodynamique	22
1.1.2	Poroélastodynamique : théorie de Biot-Gassmann	24
1.2	Phase fluide (K_f, ρ_f et η)	32
1.3	Phase solide = grains (K_s, G_s et ρ_s)	32
1.4	Milieu drainé = matrice solide	33
1.4.1	Porosité (ϕ)	34
1.4.2	Perméabilités (k_0 et $k(\omega)$)	35
1.4.3	Modules mécaniques (K_D et G_D)	37
1.4.3.1	Matériaux non consolidés	38
1.4.3.2	Matériaux consolidés	40
1.5	Milieu poreux = milieu drainé + phase fluide	41
1.5.1	Termes inertiels (ρ_f , ρ et $\tilde{\rho}(\omega)$)	41
1.5.2	Modules mécaniques du milieu poreux (K_U , G , C et M)	42
1.5.3	Relations de Gassmann (1951)	43
1.5.4	Autres théories d'homogénéisation en approximation basse fréquence .	45

Introduction

De part la variabilité géologique des milieux composant la croûte terrestre et leur évolution au cours des ères géologiques plus ou moins récentes, des milieux très variés et donc hétérogènes composent l'enveloppe superficielle de la Terre, c'est-à-dire les premières centaines de mètres, zone aussi appelée proche surface. Ainsi, on retrouve tous types de roches très différentes de part leur processus de formation géologique (magmatiques, sédimentaires ou métamorphiques) et leur évolution au cours du temps (érosion, déformation, sédimentation, métamorphisme). D'autre part, les matériaux sédimentaires issus de l'érosion et des processus de dépôts constituent une bonne partie des couches géologiques de subsurface avec des matériaux très variés,

plus ou moins consolidés, de granulométrie et de composition minéralogique diverses et hétérogènes. De plus, tous ces milieux sont la plupart du temps parsemés d'espaces vides entre les grains ou à l'intérieur de la matrice solide et ces pores sont remplis de fluide (gaz ou liquide) qui modifient les caractéristiques du matériau global. Par exemple, ces hétérogénéités physiques font que les ondes sismiques sont particulièrement appropriées pour caractériser ces milieux, car elles sont très sensibles aux variations mécaniques du milieu dans lequel elles se propagent.

En partant dans un premier temps de la théorie de l'élastodynamique qui constitue une première approximation pour décrire la propagation des ondes sismiques dans les milieux solides élastiques, on va définir les lois de propagation des ondes sismiques dans les milieux biphasiques permettant de prendre en compte tous les phénomènes dynamiques liés à la phase fluide. La deuxième partie du chapitre regroupe différentes manières de décrire les paramètres physiques (mécaniques et inertiels) des milieux poreux simples. Plusieurs étapes d'homogénéisation sont nécessaires : d'abord la description de la phase fluide, puis la description des grains solides, plus ou moins variables suivant leurs compositions minéralogiques. Ensuite, l'association des grains permet de construire un squelette, constituant la matrice solide drainée, qui a ses propres caractéristiques mécaniques et géométriques. Enfin, l'ajout du fluide, dernière étape d'homogénéisation, définit un milieu effectif biphasique sur lequel s'applique les lois de la poroélastodynamique. Dans ce chapitre, on se limite à des étapes d'homogénéisation simples. Cependant, pour avoir des modèles plus réalistes, des lois d'homogénéisation complexes et dépendant parfois du type de matériau et de son hétérogénéité seront décrits dans le chapitre 3. Mais au final, on utilisera toujours les mêmes lois dynamiques décrites dans ce chapitre et appliquées sur un milieu effectif.

1.1 Propagation des ondes sismiques dans les milieux biphasiques

1.1.1 Elastodynamique

Classiquement, la propagation des ondes dans les milieux naturels (terrestres) est étudiée en considérant l'approximation de l'élastodynamique linéaire (Lamb, 1904). Tout d'abord, à partir du principe fondamental de la dynamique (deuxième loi de Newton) qui définit la conservation de la quantité de mouvement et grâce à l'hypothèse de linéarité entre déplacement et déformation (valable en faisant l'hypothèse de petits déplacements propres à la propagation des ondes), on établit une relation entre l'accélération et la masse d'un élément de volume et les forces de volume et de surface s'appliquant sur ce volume élémentaire. La rhéologie du milieu considéré est décrite par la loi de Hooke qui relie contraintes et déformations. De nombreux auteurs reprennent en détail l'établissement des lois de l'élastodynamique, notamment Aki & Richards (1980) ou Chapman (2004). Ici, on fait l'approximation de la propagation en deux dimensions en considérant une direction d'invariance et on étudie uniquement les modes de vibration où les ondes sont polarisées dans le plan de propagation : c'est le mode P-SV. Le système de l'élastodynamique, déduit de ces hypothèses s'écrit de la façon suivante,

$$\begin{aligned}\rho \frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2} &= \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} \\ \rho \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2} &= \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \sigma_{xx} &= (\lambda + 2\mu) \frac{\partial u_x}{\partial x} + \lambda \frac{\partial u_z}{\partial z} \\
 \sigma_{zz} &= \lambda \frac{\partial u_x}{\partial x} + (\lambda + 2\mu) \frac{\partial u_z}{\partial z} \\
 \sigma_{xz} &= \mu \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \right) ,
 \end{aligned} \tag{1.1}$$

où les quantités u_x et u_z sont les composantes horizontale et verticale du champ de déplacement, les quantités σ_{xx} , σ_{zz} et σ_{xz} sont les composantes du champ de contrainte. Les paramètres physiques sont la masse volumique ρ et les paramètres de Lamé définis par la loi de Hooke. Le paramètre λ est relié au module d'incompressibilité du matériau et le paramètre μ est le module de cisaillement, parfois noté G . qui relie les contraintes σ et les déformations $\epsilon = (\epsilon_{xx}, \epsilon_{zz}, 2 \epsilon_{xz})^t$ par le système matriciel suivant,

$$\begin{pmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{xz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda + 2\mu & \lambda & 0 \\ \lambda & \lambda + 2\mu & 0 \\ 0 & 0 & \mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{zz} \\ 2 \epsilon_{xz} \end{pmatrix} . \tag{1.2}$$

La loi de Hooke peut également être décrite en fonction de deux autres paramètres classiquement utilisés en mécanique, à savoir le module d'Young E et le coefficient de Poisson ν :

$$E = \frac{\mu (3\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu} \quad \nu = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)} . \tag{1.3}$$

En appliquant une transformée de Fourier inverse avec la convention classique,

$$f(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt \tag{1.4}$$

au système 1.1 écrit dans le domaine temporel, on obtient le système différentiel en fréquence suivant,

$$\begin{cases} \nabla \cdot \boldsymbol{\tau} = -\omega^2 \rho \vec{u} , \\ \boldsymbol{\tau} = \lambda \nabla \cdot \vec{u} \mathbf{I} + G [\nabla \vec{u} + (\nabla \vec{u})^t - 2/3 \nabla \cdot \vec{u} \mathbf{I}] , \end{cases} \tag{1.5}$$

où le tenseur $\boldsymbol{\tau} = (\sigma_{xx}, \sigma_{zz}, \sigma_{xz})$ est le tenseur des contraintes, le vecteur $\vec{u} = (u_x, u_z)$ le vecteur déplacements, la grandeur ω est la pulsation en rad/s et les grandeurs ρ , λ et G sont les paramètres inertiels et mécaniques.

La résolution de ces équations produit plusieurs types d'ondes : deux ondes de volume et une onde de surface (en configuration P-SV). Les ondes de volume sont les ondes de compression P (pour Pressure ou Première) et de cisaillement S (pour Shear ou Seconde). A la surface libre, les ondes P et S interfèrent de façon constructive et génèrent des ondes de surface appelées ondes de Rayleigh qui sont dispersives et se propagent elliptiquement (dans les milieux réels). La figure 1.1 schématise les modes de propagation des trois types d'ondes. La vitesse des ondes de volume V_P et V_S est définie en fonction des paramètres mécaniques suivant les expressions

$$\begin{aligned}
 V_P &= \sqrt{\frac{\lambda + 2G}{\rho}} , \\
 V_S &= \sqrt{\frac{G}{\rho}} .
 \end{aligned} \tag{1.6}$$

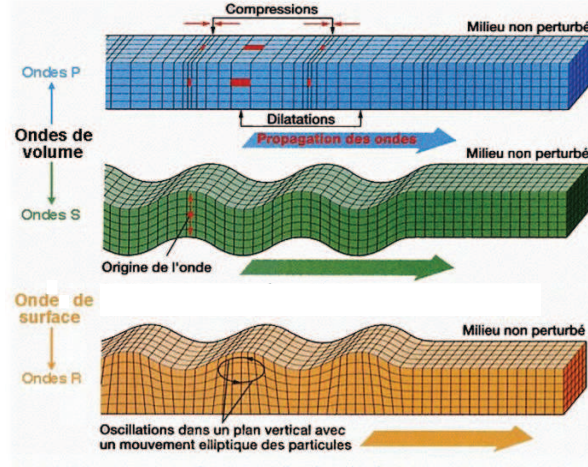


FIGURE 1.1 – Schématisation de la propagation des ondes élastiques dans un milieu 2D (modifié d'après USGS). L'onde de compression vibre dans le sens de propagation alors que l'onde de cisaillement vibre dans un plan orthogonal au sens de propagation. L'onde de Rayleigh se propage dans un plan vertical avec un mouvement elliptique des particules.

1.1.2 Poroélastodynamique : théorie de Biot-Gassmann

A partir des équations des ondes élastiques, Gassmann (1951) et Biot (1956) ont déterminé les équations dynamiques en milieux poreux au moyen de cinq hypothèses complémentaires à celles faites dans le cas de l'élastodynamique :

- (1) Longueur d'onde grande devant les dimensions du volume élémentaire représentatif,
- (2) Petits déplacements pour les phases fluide et solide,
- (3) Phase liquide continue (la porosité occluse appartient à la matrice solide), la porosité est donc isotrope et le milieu saturé,
- (4) Matrice solide élastique et isotrope,
- (5) Absence de tout couplage (thermomécanique, électrocinétique...).

Burridge & Keller (1981) ont justifié théoriquement les équations de Biot (1956) en combinant les équations de l'élasticité linéaire avec les équations de Navier-Stokes pour le fluide saturant le milieu. En utilisant la formulation de Pride *et al.* (1992) qui suppose une dépendance temporelle en $e^{-i\omega t}$, on obtient les équations d'onde suivantes dans le domaine fréquentiel

$$\begin{cases} \nabla \cdot \boldsymbol{\tau} = -\omega^2 (\rho \vec{u} + \rho_f \vec{w}) \\ \boldsymbol{\tau} = [K_U \nabla \cdot \vec{u} + C \nabla \cdot \vec{w}] \mathbf{I} + G [\nabla \vec{u} + (\nabla \vec{u})^t - 2/3 \nabla \cdot \vec{u} \mathbf{I}] \\ -P_f = C \nabla \cdot \vec{u} + M \nabla \cdot \vec{w} \\ -\nabla P_f = -\omega^2 (\rho_f \vec{u} + \tilde{\rho}(\omega) \vec{w}), \end{cases} \quad (1.7)$$

déduites des équations de la dynamique des solides et des fluides et des lois de comportement mécanique solides et fluides. Le tenseur $\boldsymbol{\tau}$ est le tenseur des contraintes et la grandeur P_f la pression interstitielle. En définissant le déplacement moyen des grains solides \vec{u}_s et le déplacement fluide \vec{u}_f , on obtient le vecteur \vec{u} qui est le déplacement d'un volume de milieu poreux

et qui est environ égal au déplacement moyen solide ($\vec{u} \simeq \vec{u}_s$) et le vecteur \vec{w} qui est le déplacement relatif solide/fluide et est relié au déplacement fluide \vec{u}_f par la relation suivante : $\vec{w} = \phi(\vec{u}_f - \vec{u}_s)$. On peut également décomposer le tenseur des contraintes $\boldsymbol{\tau}$ en un tenseur déviatorique $\boldsymbol{\tau}^D$ et un terme isotrope P_c égal à la pression de confinement tel que : $\vec{\tau} = \vec{\tau}^D - P_c \mathbf{I}$. Cette décomposition peut être utile suivant les problèmes à résoudre, notamment si on a besoin de calculer la pression de confinement. Les paramètres physiques (K_U , G , C , M , ρ_f , ρ et $\tilde{\rho}(\omega)$) sont considérés invariants dans le temps (à l'échelle de temps de la propagation des ondes mécaniques) et dépendent uniquement de l'espace alors que les contraintes et les déplacements dépendent de l'espace et du temps. La définition de ces paramètres physiques fera l'objet de la suite du chapitre.

Caractéristiques des ondes

La résolution des équations d'ondes en milieu poreux (système 1.7), réalisée par Biot (1962) en tout premier lieu, conduit à considérer trois ondes de volume se propageant dans ce type de milieu : une onde transversale et deux ondes longitudinales. Ces ondes prédites théoriquement ont ensuite été identifiées expérimentalement par Plona (1980). On retrouve les deux ondes classiques de l'élastodynamique définies dans le paragraphe précédent, l'onde de cisaillement S et l'onde de compression P (également notée P_f pour la poro-élastodynamique) mais également une deuxième onde de compression, appelée onde de Biot et notée $Biot$ ou P_s ("s" comme slow en opposition au "f" de fast). Il faut noter que certaines théories récentes considèrent également une onde de cisaillement lente (Sahay, 2008).

La lenteur des ondes S notée s_S est définie comme dans le cas élastique, la partie imaginaire additionnelle rendant la lenteur complexe. Cette partie imaginaire, introduite par le terme de résistance à l'écoulement $\tilde{\rho}(\omega)$, est responsable de l'atténuation de l'onde de cisaillement. Cette lenteur dépend donc de la fréquence et s'exprime par l'expression

$$s_S^2(\omega) = \frac{\rho - \rho_f^2 / \tilde{\rho}(\omega)}{G} . \quad (1.8)$$

On définit également les lenteurs s_P et s_{Biot} des deux ondes de compression par les expressions

$$s_P^2(\omega) = \gamma(\omega) - \sqrt{\gamma^2(\omega) - \frac{4(\rho\tilde{\rho}(\omega) - \rho_f^2)}{HM - C^2}} , \quad (1.9)$$

$$s_{Biot}^2(\omega) = \gamma(\omega) + \sqrt{\gamma^2(\omega) - \frac{4(\rho\tilde{\rho}(\omega) - \rho_f^2)}{HM - C^2}} . \quad (1.10)$$

Les paramètres $\gamma(\omega)$ et H sont définis de la façon suivante,

$$\gamma(\omega) = \frac{\rho M + \tilde{\rho}(\omega)H - 2\rho_f C}{HM - C^2} , \quad H = K_U + \frac{4}{3}G . \quad (1.11)$$

La vitesse de phase $V_{P,Biot,S}(\omega)$ est définie comme l'inverse de la partie réelle de la lenteur soit :

$$V_{P,Biot,S}(\omega) = \frac{1}{\mathcal{Re}(s_{P,Biot,S}(\omega))} . \quad (1.12)$$

De plus, on définit l'atténuation intrinsèque des ondes par le calcul du coefficient d'atténuation $\alpha(\omega)$ dépendant de la partie imaginaire de la lenteur complexe tel que :

$$\alpha_{P,Biot,S} = \omega \operatorname{Im}(s_{P,Biot,S}(\omega)) . \quad (1.13)$$

On définit souvent l'atténuation des ondes par l'introduction d'un facteur de qualité $Q(\omega)$ tel que :

$$Q_{P,Biot,S}(\omega) = \frac{1}{2} \frac{\operatorname{Re}(s_{P,Biot,S}(\omega))}{\operatorname{Im}(s_{P,Biot,S}(\omega))} = \frac{\omega}{2 \alpha(\omega) V(\omega)} . \quad (1.14)$$

Dans la théorie de Biot, le seul terme complexe est le terme de résistance à l'écoulement $\tilde{\rho}(\omega)$ et c'est donc ce seul terme (qui décrit la diffusion de pression interstitielle) qui est responsable de l'atténuation intrinsèque des ondes. En effet, à travers la viscosité du fluide, les forces de frottements entre les phases fluide et solide, engendrées par le mouvement des particules lors du passage de l'onde sismique, créent des pertes d'énergie et donc une diminution de l'amplitude de l'onde. Plus ces déperditions d'énergie sont fortes, plus l'atténuation est importante. L'atténuation est proportionnelle à l'inverse du facteur de qualité : plus Q est faible, plus l'atténuation est forte. Ce facteur de qualité est un moyen de considérer l'atténuation intrinsèque en approximation élastique ; on considère alors des mécanismes de relaxation viscoélastique de type Zener.

Les ondes de volume P et S ont des caractéristiques semblables aux ondes de compression et de cisaillement de l'élastodynamique classique (voir le paragraphe 1.1.1). En revanche, l'onde de Biot a un comportement particulier fortement dépendant de la fréquence. En effet, pour des fréquences inférieures à la fréquence de coupure $f_c = \omega_c/(2\pi)$ (ω_c est une pulsation caractéristique définie par l'équation 1.20), l'onde de Biot correspond à une onde de diffusion de la pression interstitielle. A haute fréquence, au dessus de f_c , elle devient propagative. Dans les cas classiques où l'onde de Biot est diffusive, elle est très dispersive et très fortement atténuée contrairement à l'onde de compression classique P . Pour l'onde P rapide, le déplacement d'ensemble (matrice solide + fluide) et le déplacement du fluide sont en phase alors que, dans le cas de l'onde de Biot, les déplacements sont en opposition de phase.

Dépendance fréquentielle des vitesses et des atténuations : étude de la dispersion.

Les vitesses et les facteurs de qualité des ondes P , S et $Biot$ dépendent de la fréquence et les figures 1.2 et 1.3 illustrent ce comportement dispersif des ondes dans les milieux poreux pour trois régimes différents de l'onde de Biot. Les paramètres associés à ces trois cas (régimes diffusif, intermédiaire et propagatif) sont donnés dans le tableau 1.1. L'homogénéisation des phases fluides et solides qui permet de calculer les vitesses et atténuations à partir des paramètres descriptifs du tableau 1.1 est décrite dans les paragraphes suivants. On calcule les vitesses et les facteurs de qualité sur une bande de fréquence allant de 1 Hz jusqu'à 100 MHz . Cependant, les fréquences des ondes qui se propagent dans les milieux naturels sont plutôt de l'ordre du Hz en sismologie, de l'ordre de la dizaine de Hz pour la sismique profonde, de la centaine de Hz pour les applications de proche surface et jusqu'au MHz pour les expériences acoustiques en laboratoire. On définit donc trois milieux en fonction du comportement de l'onde de Biot dans ce milieu à basse fréquence. Dans le premier cas (première colonne du tableau 1.1), la fréquence de coupure f_c est élevée et l'onde de Biot correspond à une onde

de diffusion, très atténuée dès que l'on s'éloigne de quelques longueurs d'onde de sa zone de création (sources, interfaces). Dans le deuxième cas, on est dans un milieu où l'onde de Biot a un comportement intermédiaire diffusif/propagatif dans la gamme de fréquence utilisée en sismique classique (1 – 500 Hz). Dans le troisième cas, le milieu choisi permet d'avoir une onde de Biot totalement propagative (f_c très faible) qui a alors un comportement propagatif similaire aux ondes de volumes "élastiques".

Regime de l'onde de Biot	Diffusif	Intermédiaire	Propagatif
K_s (GPa)	40	40	40
G_s (GPa)	10	10	10
ρ_s (kg/m^3)	2700	2700	2700
K_f (GPa)	2.2	2.2	2.2
ρ_f (kg/m^3)	1000	1000	1000
η ($Pa.s$)	0.001	0.001	10^{-7}
m	1	1	1
ϕ	0.4	0.4	0.4
k_0 (m^2)	10^{-11}	10^{-9}	10^{-11}
cs	5	5	5
f_c (Hz)	6400	64	0.64

TABLE 1.1 – Paramètres physiques utilisés pour calculer les vitesses de propagation et les facteurs de qualité des ondes P, S et Biot (figures 1.2 et 1.3). L'homogénéisation des phases fluides et solides qui permet de calculer ces vitesses et atténuations est décrite dans les paragraphes suivants.

Les ondes P et S sont très peu dispersives (variations de quelques m/s à 50 m/s pour l'onde P , variations de 20 à 100 m/s pour l'onde S sur toute la bande de fréquence) avec un premier palier à basse fréquence jusqu'à la fréquence de coupure environ, puis une augmentation de la vitesse jusqu'à atteindre un autre palier à haute fréquence (graphiques des deux premières lignes de la figure 1.2). L'onde de Biot (troisième ligne de la figure 1.2) est en revanche beaucoup plus dispersive, avec le même comportement que pour les ondes P et S , c'est-à-dire une forte variation de la vitesse autour de la fréquence de coupure et de plus faibles variations à basse et haute fréquences. La variation de vitesse dépend fortement du cas considéré : variations de 10 à 1200 m/s pour le cas diffusif et de 100 à 1400 m/s pour le cas intermédiaire alors qu'il y a "seulement" des variations de 1100 à 1400 m/s pour le cas propagatif. Cela semble logique que l'onde de Biot entièrement propagative ait une plus faible dispersion (comme les ondes P et S) que l'onde de Biot intermédiaire au comportement physique très variable suivant la fréquence.

Les facteurs de qualité varient beaucoup en fonction de la fréquence. Pour les ondes P et S (graphiques des deux premières lignes de la figure 1.3), il y a peu d'atténuation à basse et haute fréquences avec une augmentation de l'atténuation (diminution du facteur de qualité) autour de la fréquence de coupure. Ce comportement est visible quel que soit le cas considéré. Rappelons que, pour le cas propagatif, la fréquence de coupure est proche de zéro. L'onde de Biot est très atténuée à basse fréquence et cette atténuation diminue quand on augmente la fréquence, plus ou moins rapidement suivant le cas considéré.

On voit donc sur ces exemples théoriques et généraux que les observables classiques en sismique (temps d'arrivées = vitesses de propagation et amplitudes des ondes = atténuations)

sont très dépendantes de la fréquence dans le cas de la propagation en milieux poreux qui constituent la plupart des milieux réels. De plus, l'approximation viscoélastique qui vise à retrouver ces attributs en considérant uniquement un milieu élastique avec des mécanismes de relaxation pour prendre en compte l'atténuation, ne considère pas de variation fréquentielle de l'atténuation. En effet, en règle général, les facteurs de qualité utilisés dans les modélisations viscoélastiques sont choisis constants et non dépendants de la fréquence, alors que les exemples de milieux poreux réalistes (voir figures 1.3) montrent clairement une forte dépendance de l'atténuation à la fréquence. On justifie ainsi l'approche poroélastique utilisée pour décrire plus précisément les milieux réels. Dans la suite du chapitre, on va donc voir quelles sont les théories physiques qui permettent de décrire ces milieux biphasiques par homogénéisation des phases.

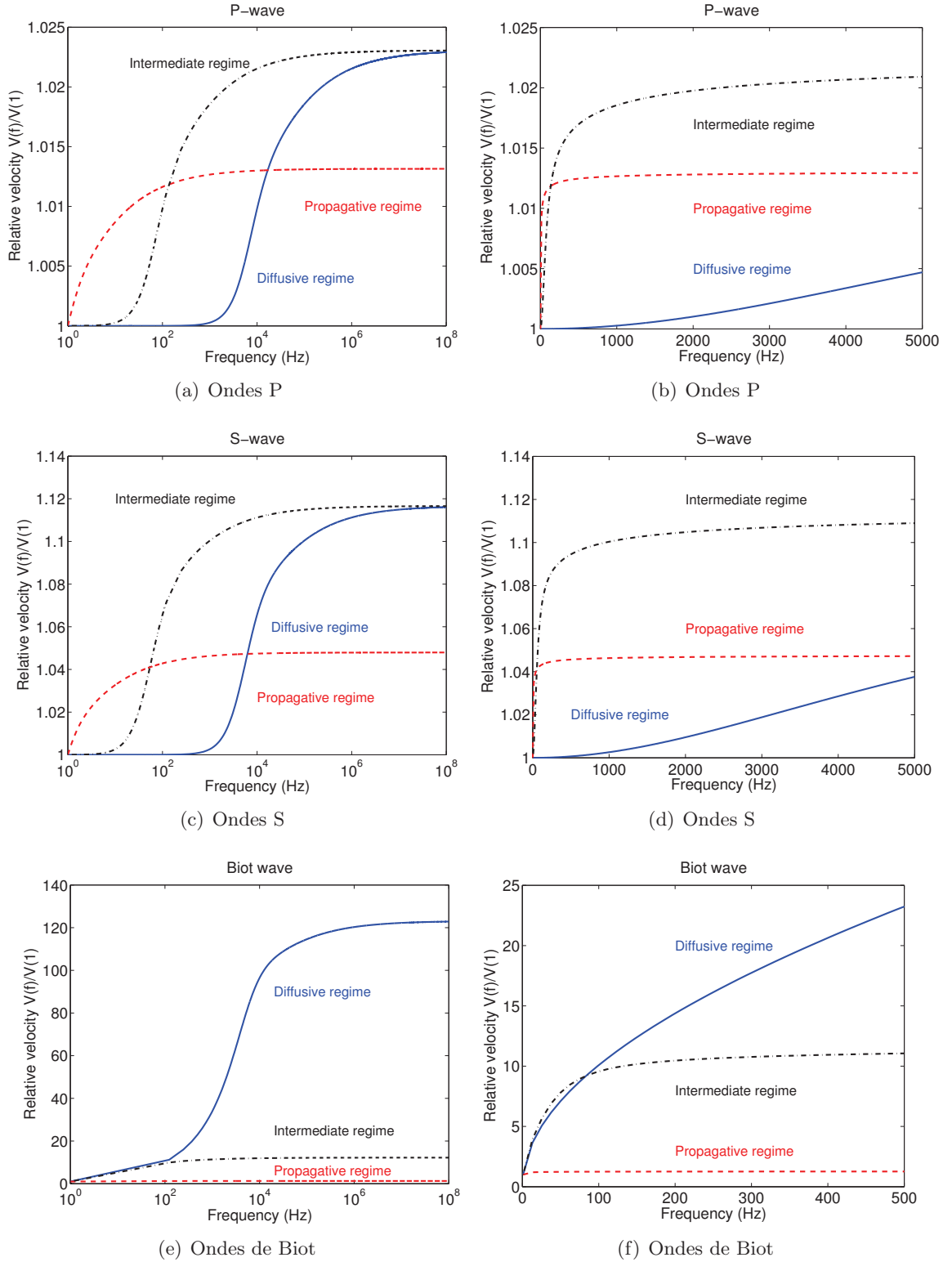


FIGURE 1.2 – Vitesses de propagation relatives à la vitesse à 1 Hz des ondes P (a,b), S (c,d) et Biot (e,f) en fonction de la fréquence. Les graphiques (b,d,f) sont des zooms entre 1 et 5000 Hz (500 Hz pour l'onde de Biot) afin d'observer le comportement dispersif à basse fréquence.

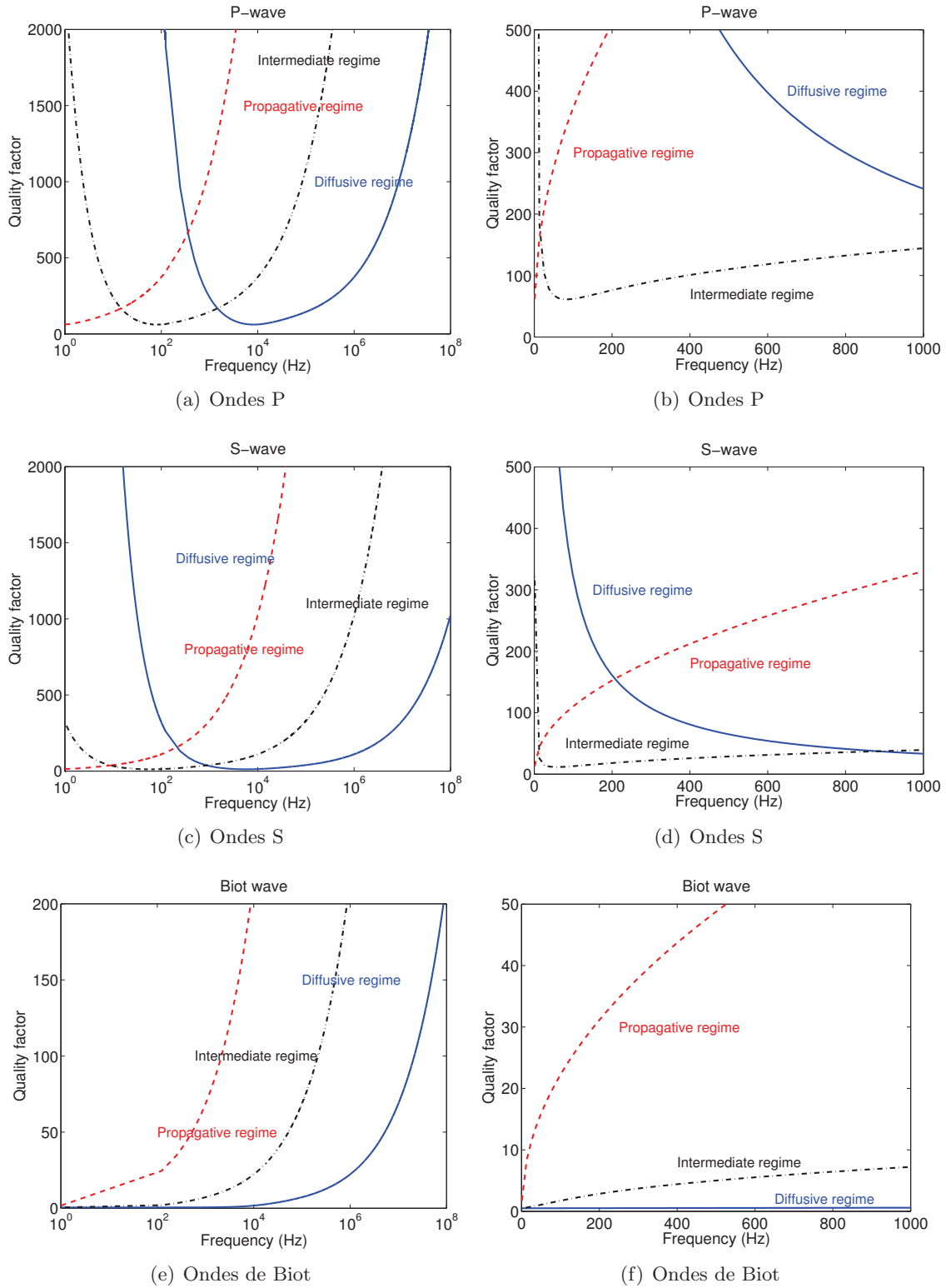


FIGURE 1.3 – Facteurs de qualité des ondes P (a,b), S (c,d) et Biot (e,f) en fonction de la fréquence. Les graphiques (b,d,f) sont des zooms entre 1 et 1000 Hz afin d'observer le comportement dispersif à basse fréquence.

Paramètres macroscopiques et homogénéisation

Les paramètres physiques macroscopiques utilisés dans les équations de la poroélastodynamique (système 1.7) sont :

- quatre paramètres mécaniques : les modules liés à l'élasticité du solide, le module d'incompressibilité du milieu non drainé K_U et le module de cisaillement de la matrice solide G , le module lié à l'interaction entre les phases fluides et solides appelé module de Biot C et le coefficient de rétention fluide M .
- trois termes de densité : la masse volumique du fluide ρ_f , la masse volumique moyenne du milieu ρ et le terme complexe et fréquemment dépendant de résistance à l'écoulement $\tilde{\rho}$.

La définition de ces paramètres résulte d'un processus d'homogénéisation des phases fluides et solides pour construire un milieu équivalent, défini par ces sept paramètres uniquement. Ce processus d'homogénéisation est résumé dans un cas simple par la figure 1.4. D'un côté, on combine les grains du ou des minéraux constitutifs pour former une matrice solide ou milieu drainé. De l'autre côté, on considère une phase fluide définie par trois paramètres. Enfin, par association de la phase fluide équivalente avec le squelette solide, on construit le milieu poreux non drainé. C'est pour ce milieu équivalent, biphasique, qu'est calculé la propagation des ondes mécaniques définie par le système 1.7. La suite de ce chapitre a pour but de décrire les différentes techniques d'homogénéisation de ces milieux complexes multiphasiques.

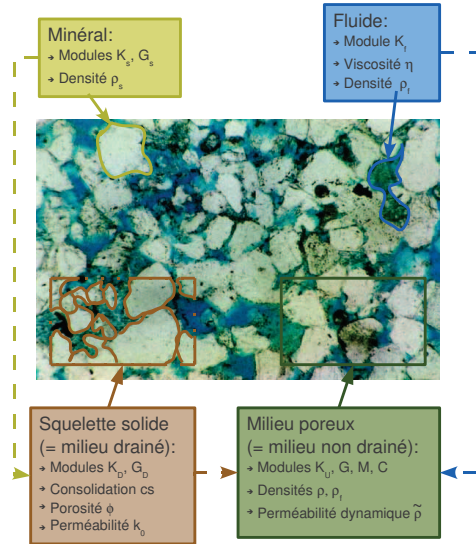


FIGURE 1.4 – Représentation schématique des différentes phases d'un milieu poreux. L'association de la matrice solide par l'intermédiaire d'un assemblage des grains minéraux et de la phase fluide permet de créer un milieu poreux non drainé. L'échantillon présenté est un grès de l'Ordovicien extrait d'une carotte à 1250 mètres de profondeur et grossi 84 fois. Les pores ont été saturés par de la résine époxy bleue. La matrice minérale est formée de grains siliceux blancs et de minéraux argileux noirs (d'après De Barros (2007)).

1.2 Phase fluide (K_f , ρ_f et η)

Les paramètres physiques d'une phase fluide (K_f , ρ_f et η) dépendent de la nature des fluides. Le tableau 1.2 donne des valeurs caractéristiques du module d'incompressibilité K_f , de la viscosité η et de la masse volumique ρ_f pour les fluides classiques.

Fluide	K_f (GPa)	η (10^{-3} Pa.s)	ρ_f (kg/m ³)
Eau	2.27	1	1000
Eau de mer	2.6	1.04	1020
Huile	2.16	445	890
Air	$1.5 \cdot 10^{-4}$	0.018	1.2
Méthane	0.022	0.015	100

TABLE 1.2 – Caractéristiques mécaniques de quelques fluides classiques.

Dans le cas de fluides polyphasiques, les différentes théories d'homogénéisation sont décrites dans le chapitre 3, partie 3.3.

1.3 Phase solide = grains (K_s , G_s et ρ_s)

Les paramètres relatifs à la phase solide, que ce soient ceux des grains ou ceux du squelette, sont pour la plupart mesurables en laboratoire (essais triaxiaux drainés ou non pour les modules d'incompressibilité, essais de cisaillement pour les modules de cisaillement, essais œdométriques pour les paramètres de consolidation du squelette...). Les grains qui composent la première échelle de la phase solide (voir figure 1.4) sont définis physiquement par trois paramètres : une masse volumique ρ_s , un module d'incompressibilité K_s et un module de cisaillement G_s . Pour les minéraux classiques, on donne les valeurs de ces trois paramètres dans le tableau 1.3.

Les paramètres mécaniques d'une roche polycristalline sont définis en calculant des valeurs moyennes pondérées par le pourcentage v_i de chaque constituant minéral : c'est une première phase d'homogénéisation à l'échelle microscopique. On utilise une moyenne arithmétique (loi de Voigt) pour le calcul de la masse volumique moyenne (due à la linéarité de la masse volumique vis-à-vis de la proportion de chaque minéral) et une moyenne harmonique (loi de Reuss) pour le calcul des modules d'incompressibilité et de cisaillement :

$$\begin{aligned}\rho_s &= \sum_i v_i \rho_{si} , \\ \frac{1}{K_s} &= \sum_i \frac{v_i}{K_{si}} , \\ \frac{1}{G_s} &= \sum_i \frac{v_i}{G_{si}} .\end{aligned}\tag{1.15}$$

L'encadrement très large, donné par les bornes de Reuss et Voigt (Hill, 1952), peut être réduit en utilisant les bornes de Hashin & Shtrikman (1963). Par simplicité, on utilise ici une

moyenne harmonique : pour un granite composé de 30% de quartz (silice), 10% de micas (7% de biotite et 3% de muscovite) et 60% de feldspaths, on calcule les paramètres effectifs :

$$\begin{aligned}
\rho_s &= v^{\text{quartz}} \rho_s^{\text{quartz}} + v^{\text{biotite}} \rho_s^{\text{biotite}} + v^{\text{muscovite}} \rho_s^{\text{muscovite}} + v^{\text{feldspaths}} \rho_s^{\text{feldspaths}} \\
\rho_s &= 0,3 * 2700 + 0,07 * 3050 + 0,03 * 2800 + 0,6 * 2620 \\
\rho_s &\simeq 2680 \text{ kg/m}^3 \\
\frac{1}{K_s} &= \frac{v^{\text{quartz}}}{K_s^{\text{quartz}}} + \frac{v^{\text{biotite}}}{K_s^{\text{biotite}}} + \frac{v^{\text{muscovite}}}{K_s^{\text{muscovite}}} + \frac{v^{\text{feldspaths}}}{K_s^{\text{feldspaths}}} \\
\frac{1}{K_s} &= \frac{0,3}{37} + \frac{0,07}{59,7} + \frac{0,03}{51,6} + \frac{0,6}{37,5} \\
K_s &\simeq 38,7 \text{ GPa} \\
\frac{1}{G_s} &= \frac{v^{\text{quartz}}}{G_s^{\text{quartz}}} + \frac{v^{\text{biotite}}}{G_s^{\text{biotite}}} + \frac{v^{\text{muscovite}}}{G_s^{\text{muscovite}}} + \frac{v^{\text{feldspaths}}}{G_s^{\text{feldspaths}}} \\
\frac{1}{G_s} &= \frac{0,3}{44} + \frac{0,07}{42,3} + \frac{0,03}{31} + \frac{0,6}{15} \\
G_s &\simeq 20,2 \text{ GPa}
\end{aligned} \tag{1.16}$$

Les valeurs données dans le tableau 1.3 et utilisées pour le calcul sont celles de minéraux sains, non endommagés. Dans la réalité, les minéraux peuvent avoir des caractéristiques mécaniques inférieures dues à des phénomènes de fissuration ou de microporosité internes aux grains.

Minéral	$\rho_s \text{ (kg/m}^3\text{)}$	$K_s \text{ (GPa)}$	$G_s \text{ (GPa)}$
Calcite (CaCO_3)	2700	72.6	31.6
Silice (SiO_2)	2700	37	44
Olivine ($(\text{Mg}, \text{Fe})\text{SiO}_4$)	3320	130	80
Feldspaths	2620	37.5	15
Plagioclases (Feldspaths K)	2695	53.6	27.1
Biotite	3050	59.7	42.3
Muscovite	2800	51.6	31
Dolomite	2880	93.9	54.6
Argile (Golfe du Mexique)	2300	6.75	4.925
Anhydrite	2970	58.1	31.3

TABLE 1.3 – Caractéristiques mécaniques de certains minéraux classiques (tiré de Bourbié *et al.* (1986) et Mavko *et al.* (2009)).

1.4 Milieu drainé = matrice solide

L'association des grains en un squelette est la deuxième phase d'homogénéisation (voir figure 1.3), qui permet de passer d'un milieu décrit à l'échelle microscopique à une matrice mésoscopique. Le squelette solide ainsi construit correspond à un milieu drainé (pas de fluide) qui a pour caractéristiques

- des paramètres associés à l'arrangement des grains, leur géométrie et leur état de cimentation : la porosité ϕ , la perméabilité intrinsèque k_0 (qui est également reliée à l'écoulement des fluides) et le paramètre de cimentation des grains cs .

- des modules mécaniques équivalents : le module d'incompressibilité du milieu drainé K_D et le module de cisaillement du squelette G_D .

1.4.1 Porosité (ϕ)

La porosité définit la proportion des vides contenus dans le squelette solide, c'est le rapport du volume des vides V_v sur le volume total V_T d'un échantillon, tel que

$$\phi = \frac{V_v}{V_T} . \quad (1.17)$$

Il existe deux types de porosité, connectée ou occluse, avec des pores reliés entre eux ou non. On néglige souvent la porosité occluse dans les matériaux naturels car elle est faible (à part quelques cas significatifs comme certaines roches volcaniques) et prise en compte dans la description des grains eux-mêmes. La porosité est modélisable pour des matériaux idéalisés comme les empilements de sphères réguliers par exemple, mais, pour les matériaux naturels, elle peut prendre diverses formes et être plus difficilement modélisable. Les sols ont une porosité très variable dépendant de leur granulométrie (forme et taille des grains : très différents entre un sable grossier et une argile, par exemple), de l'assemblage des grains et de l'état de compaction du matériau. De plus, les dépôts sédimentaires étant souvent assez hétérogènes, la porosité varie également beaucoup à l'échelle du massif, sur quelques dizaines de mètres.

Pour les roches, la porosité est plutôt reliée à l'état de fracturation (micro et macro) du massif rocheux. De plus, pour certaines roches sédimentaires comme les grès, certains calcaires ou craies et pour les roches volcaniques dégazées en surface, la porosité est également matricielle. Dans ces cas-là, il faut alors considérer deux types de porosité à des échelles souvent différentes, une porosité de fracture affectant le massif et contraignant les écoulements principaux et une porosité matricielle à l'échelle microscopique, parfois en partie occluse. Dans les cas où l'on retrouve deux types de porosité de nature et de valeur différentes, on pourra introduire un milieu à double porosité. Dans ce cas, les phases d'homogénéisation sont plus complexes et sont décrites dans le chapitre 3.

On donne dans le tableau 1.4 quelques valeurs classiques de porosité et de perméabilité (tirées de Guéguen & Palciauskas (1992), Wang *et al.* (1991) et Rasolofosaon (1987)). Le livre de Mavko *et al.* (2009) donne également un éventail des porosités mesurées expérimentalement dans plusieurs types de roches (calcaires, dolomite, divers grès).

Matériau	ϕ	k_0 (m^2)
Grès (Béréa)	0.223	$1,6 \cdot 10^{-10}$
Grès (Karr Buesky)	0.088	$3,6 \cdot 10^{-13}$
Calcaire à grains (Lavoux)	0.24	$4,4 \cdot 10^{-11}$
Calcaire (Estailades)	0.35	$2,5 \cdot 10^{-10}$
Andésite (Volvic)	0.23	$4,1 \cdot 10^{-11}$
Sable (Ottawa)	0.37	$2,96 \cdot 10^{-9}$

TABLE 1.4 – Porosités et perméabilités de quelques matériaux (tirées de Guéguen & Palciauskas (1992), Wang *et al.* (1991) et Rasolofosaon (1987)).

1.4.2 Perméabilités (k_0 et $k(\omega)$)

En relation avec les paramètres intrinsèques à la fraction fluide, les caractéristiques des écoulements des fluides interstitiels sont régies par plusieurs paramètres. La perméabilité intrinsèque k_0 est définie à partir de la loi de Darcy qui postule que la vitesse de filtration d'un fluide $\partial \vec{w} / \partial t$ est proportionnelle au gradient de pression ∇P_f (η étant la viscosité dynamique) suivant l'expression :

$$\frac{\partial \vec{w}}{\partial t} = -\frac{k_0}{\eta} \nabla P_f . \quad (1.18)$$

Cette loi de comportement décrivant l'écoulement des fluides est correcte pour des écoulements à basse fréquence, c'est-à-dire quand l'écoulement est limité par les effets visqueux de cisaillement du fluide sur le solide. Les effets inertiels prennent le pas sur ces frottements visqueux lorsque les fréquences d'écoulement augmentent.

Des ordres de grandeurs de la perméabilité intrinsèque k_0 pour des matériaux courants sont donnés dans les tableaux 1.4 et 1.5. Les valeurs sont de l'ordre de 10^3 à 10^{-3} mD , c'est-à-dire environ 10^{-9} à 10^{-14} m^2 pour les matériaux poreux courants ($1 \text{ Darcy} = 0.987 \cdot 10^{-12} \text{ m}^2$). Il faut noter que l'on utilise souvent en hydraulique des sols la perméabilité (ou conductivité) hydraulique K exprimée en m/s et définie par le rapport de la perméabilité intrinsèque multipliée par le poids volumique du fluide $\gamma_f = \rho_f * g$ (avec $g = 9,81 \text{ m/s}^2$) et de la viscosité dynamique η tel que $K = \gamma_f k_0 / \eta$. On retrouve alors les ordres de grandeurs des perméabilités utilisées en géotechnique, c'est-à-dire de l'ordre de 10^{-2} à 10^{-8} m/s comme décrit dans le tableau 1.5.

Sédiments granulaires	Graves		Sables ou graves sableuses				Sables fins, limons, loess							
Sédiments fins					Tourbes		Argiles stratifiées				Argiles saines, massives			
Matériaux consolidés	Roches très fracturées				Roches très poreuses			Grès		Calcaires		Granites		
$k_0 \text{ (m}^2\text{)}$	10^{-7}	10^{-8}	10^{-9}	10^{-10}	10^{-11}	10^{-12}	10^{-13}	10^{-14}	10^{-15}	10^{-16}	10^{-17}	10^{-18}	10^{-19}	
$K \text{ (m/s)}$	1	10^{-1}	10^{-2}	10^{-3}	10^{-4}	10^{-5}	10^{-6}	10^{-7}	10^{-8}	10^{-9}	10^{-10}	10^{-11}	10^{-12}	

TABLE 1.5 – Perméabilités intrinsèque k_0 et hydraulique K de quelques matériaux (tiré de Bear (1972))

Afin de modéliser précisément les interactions visqueuses du fluide avec le squelette solide, Auriault *et al.* (1985) et Johnson *et al.* (1987) ont généralisé la loi de Darcy et défini une perméabilité dynamique $k(\omega)$, complexe et dépendante de la fréquence, décrite par la loi de dispersion suivante

$$k(\omega) = \frac{k_0}{\sqrt{1 - i \frac{4}{n_J} \frac{\omega}{\omega_c} - i \frac{\omega}{\omega_c}}} , \quad (1.19)$$

où n_J est un nombre sans dimension dépendant de la géométrie des pores mais variant peu autour de la valeur 8 pour la plupart des applications (Pride, 2005). La pulsation de coupure ω_c est une pulsation caractéristique dépendante du milieu solide (via k_0 et ϕ) et du fluide (via ρ_f et η) et qui influe sur le comportement dynamique en déterminant des régimes de

propagation/diffusion pour l'onde de Biot (voir paragraphe 1.1.2). Cette pulsation de coupure s'exprime par l'expression

$$\omega_c = \frac{\eta}{\rho_f F k_0} . \quad (1.20)$$

Le paramètre F est le facteur de formation électrique rendant compte de la tortuosité du milieu. Il est donné par la loi d'Archie comme étant égal à $F = \phi^{-m}$ où m est le facteur de cimentation lié à la géométrie des pores. Ce facteur de cimentation est égal à 1 pour une roche fracturée, 1.5 pour des sables propres et 2 pour des sables argileux (Brown, 1980; Adler *et al.*, 1992). Le facteur de formation électrique F peut également s'exprimer en fonction de la tortuosité α_∞ tel que : $F = \alpha_\infty / \phi$. Pour un milieu saturé en eau avec une perméabilité intrinsèque de 10^{-12} m^2 , on obtient des fréquences de coupure de l'ordre de 10^3 à 10^5 Hz suivant la porosité.

On introduit ensuite le terme complexe de résistance à l'écoulement $\tilde{\rho}(\omega)$ qui est responsable de l'atténuation intrinsèque des ondes dans la théorie de la poro-élasticité de Biot (1956) et qui s'exprime par l'expression

$$\tilde{\rho}(\omega) = \frac{i\eta}{\omega k(\omega)} . \quad (1.21)$$

La perméabilité dynamique $k(\omega)$ et le terme de résistance à l'écoulement $\tilde{\rho}(\omega)$ sont tout les deux dépendants de la fréquence et les deux graphiques de la figure 1.5 illustrent le comportement de la partie réelle de ces deux paramètres sur une large bande de fréquence pour des milieux poreux définis par les paramètres du tableau 1.6 avec une perméabilité intrinsèque k_0 variant de 10^{-9} à 10^{-15} m^2 , ce qui correspond à des fréquences de coupure f_c comprises entre 64 Hz et 64.10^7 Hz . La perméabilité dynamique varie beaucoup en fonction de la fréquence (variations de 10^9 ordres de grandeurs pour $k_0 = 10^{-9} \text{ m}^2$ et de 20 ordres de grandeurs pour $k_0 = 10^{-15} \text{ m}^2$) à partir de la fréquence de coupure et atteint un palier à haute fréquence. Le terme de résistance à l'écoulement a un comportement similaire, c'est-à-dire peu de variation en dessous et au dessus de la fréquence de coupure et des variations fortes autour de f_c . Les variations sont moins importantes que pour la perméabilité dynamique, de l'ordre de 20%.

			k_0	ω_c	f_c
ρ_f	(kg/m^3)	1000	(m^2)	(rad/s)	(Hz)
η	$(Pa.s)$	0.001	10^{-9}	400	64
m		1	10^{-11}	40000	6400
ϕ		0.4	10^{-13}	40.10^6	64.10^5
			10^{-15}	40.10^8	64.10^7

TABLE 1.6 – Paramètres physiques utilisés pour calculer la perméabilité hydraulique $k(\omega)$ et le terme de résistance à l'écoulement $\tilde{\rho}(\omega)$ en fonction de la fréquence (figure 1.5).

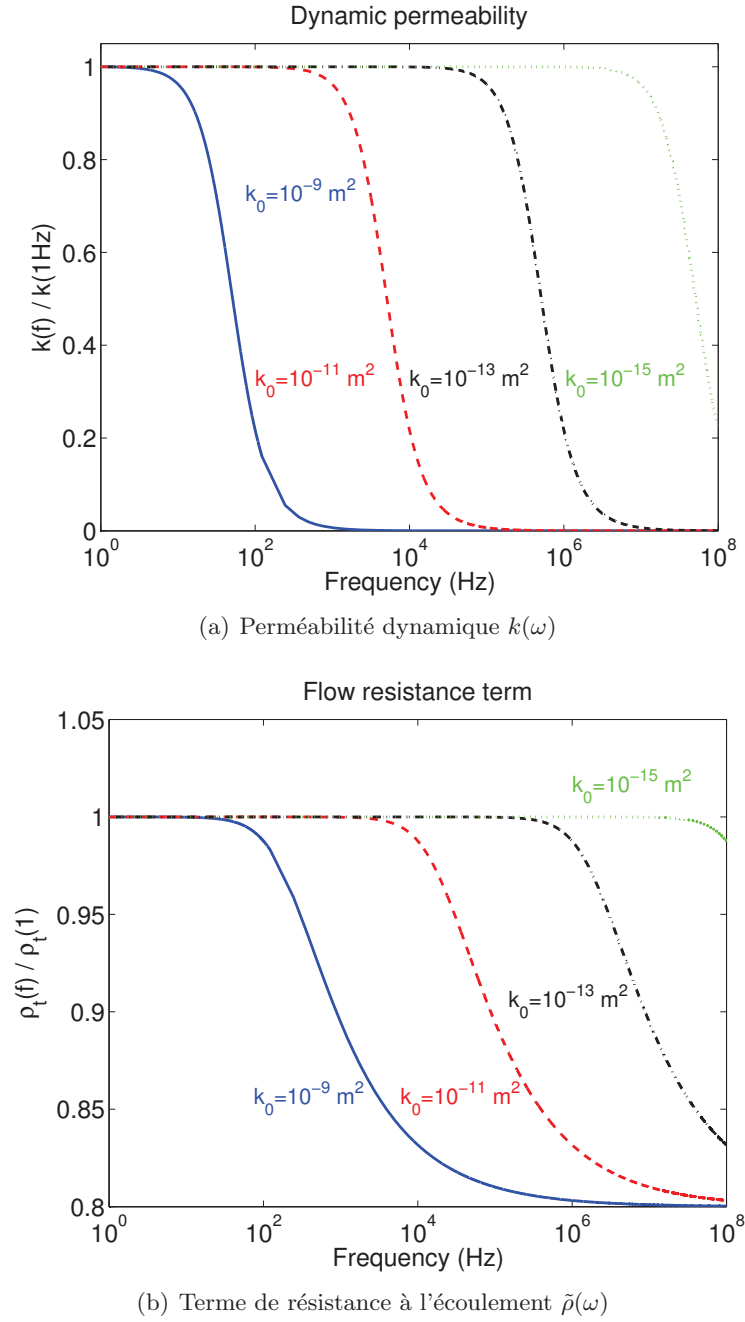


FIGURE 1.5 – Parties réelles des (a) perméabilités dynamiques $k(\omega)$ relatives à $k(1 \text{ Hz})$ et des (b) termes de résistance à l’écoulement $\tilde{\rho}(\omega)$ relatifs à $\tilde{\rho}(1 \text{ Hz})$ pour quatre perméabilités hydrauliques en fonction de la fréquence.

1.4.3 Modules mécaniques (K_D et G_D)

L’homogénéisation des grains pour construire le squelette permet de calculer deux modules mécaniques équivalents qui définissent les caractéristiques mécaniques du squelette : le module d’incompressibilité K_D et le module de cisaillement G_D (D pour “Dry”). La complexité de

ces définitions théoriques vient de l'hétérogénéité des grains et de la microgéométrie de leur association. Il existe de nombreux modèles pour calculer les modules mécaniques du squelette (voir les livres de Berryman (1995) et Mavko *et al.* (2009) ainsi que Pride & Berryman (1998) qui donnent une base exhaustive de toutes les théories d'homogénéisation pour des milieux solides hétérogènes). Pride (2005) sélectionne certains de ces modèles théoriques, les plus adaptés aux données hydrogéophysiques, même si aucun modèle n'est universel. Dans cette partie, on reprend certains de ces modèles en faisant la distinction entre les matériaux non consolidés et consolidés. Théoriquement, on définit le module d'incompressibilité drainé K_D comme la variation de volume en fonction de la pression sous la condition que la pression fluide interne ne change pas, ce module est donc indépendant du contenu en fluide. Cela s'exprime de la façon suivante par

$$K_D = - \left(\frac{\delta P_c}{\delta V/V_0} \right)_{\delta P_f=0} . \quad (1.22)$$

Le changement de volume est décrit par δV et le volume initial par V_0 , on a donc : $\delta \nabla \cdot \vec{u} = \delta V/V_0$ ($\nabla \cdot \vec{u}$ correspond à la dilatation du volume total). Ce module est mesuré classiquement en laboratoire par un essai triaxial drainé. Cependant, les essais de laboratoire ne sont pas toujours disponibles et surtout proviennent d'un échantillonnage du milieu très ponctuel qui n'est pas forcément représentatif des paramètres globaux. Le module K_D est alors calculé par un milieu effectif à partir des caractéristiques et de l'agencement des grains. Même si les théories d'homogénéisation sont dépendantes de chaque cas, on distingue deux classes principales de comportement : les sols non consolidés et les roches consolidées.

1.4.3.1 Matériaux non consolidés

Dans le cas des matériaux non consolidés (les sols, de manière générale, les sables, les argiles...), les contacts entre grains, c'est-à-dire les contraintes et déformations à l'échelle microscopique, sont les facteurs contrôlant les déformations globales du milieu. Malgré la diversité de taille et de formes de grains, ces types de matériaux sont le plus souvent décrits comme des empilements de sphères.

Pour les matériaux réels, non idéalisés, les grains sont de tailles variables mais on ne peut établir de relation entre la porosité et les modules mécaniques de la matrice. Un remplissage de grains très fins (par exemple, des particules d'argiles de $10 \mu m$ de diamètre) au sein d'une couche de sable (constituée de grains de $0,5 mm$ de diamètre) va très fortement diminuer la porosité du milieu mais va avoir un effet négligeable sur les modules mécaniques. En effet, plus la surface de contact entre grains est grande, plus le matériau devient rigide (les modules augmentent). C'est ce concept théorique qui régit l'estimation des modules mécaniques dans un matériau non consolidé. Ainsi, quand la contrainte effective P_e (qui est égale à la pression de confinement P_c minorée par la pression interstitielle du fluide P_f : $P_e = P_c - P_f$) augmente, la surface de contact intergranulaire augmente, et les modules également. Ce concept théorique est vérifié sur les sables naturels. Par exemple, Hardin & Richart (1963) ou Domenico (1977) montrent que K_D et G_D augmentent quand P_e augmente. Walton (1987) a proposé un modèle simple pour un empilement aléatoire de sphères de tailles identiques. Il définit les quantités K_D et G_D de la façon suivante

$$K_D = \frac{1}{6} \left[\frac{3 (1 - \phi_0)^2 n^2 P_e}{\pi^4 C_s^2} \right]^{1/3} \quad \text{et} \quad G_D = R K_D , \quad (1.23)$$

où ϕ_0 est la porosité à contrainte effective nulle, n est le nombre moyen de contacts intergranulaires et C_s est un paramètre de conformité relié aux modules des minéraux tel que

$$C_s = \frac{1}{4\pi} \left(\frac{1}{G_s} + \frac{1}{K_s + G_s/3} \right) . \quad (1.24)$$

Le coefficient de proportionnalité R entre le module de cisaillement et le module d'incompressibilité est compris dans la fourchette suivante

$$\frac{3}{5} \leq R \leq \frac{18}{5} \left(\frac{K_s + G_s}{3 K_s + 2 G_s} \right) . \quad (1.25)$$

La limite basse correspond au cas où la force de cisaillement entre grains est négligeable, due à des grains complètement lisses (dans ce cas là, la force de cisaillement est reprise par un glissement tangentiel des deux grains en contact). La limite haute correspond au cas inverse où les grains très rugueux empêchent tout déplacement : la force de cisaillement est entièrement transmise au contact intergranulaire. Pride (2005) indique que la valeur $R = 3/5$ est la plus appropriée pour les données réelles. De plus, les équations précédentes sont valables en faisant l'hypothèse que le nombre de contact entre grains n est constant quelle que soit la contrainte effective et identique à n à $P_e = 0$. Pour contrebalancer cette hypothèse réductrice et en tenant compte de la variabilité du nombre de contacts avec l'état de compaction du milieu, Pride (2005) a reformulé l'équation de Walton (1987) (équation 1.23) tel que

$$K_D = \frac{1}{6} \left[\frac{4 (1 - \phi_0)^2 n_0^2 P_0}{\pi^4 C_s^2} \right]^{1/3} \frac{(P_e/P_0)^{1/2}}{(1 + (16 P_e/(9 P_0))^4)^{1/24}} . \quad (1.26)$$

La quantité P_0 est la pression empirique au delà de laquelle $n = n_0$ (n_0 étant le nombre maximum de contacts) et aucun nouveau contact entre grains n'est créé par la compaction. La valeur de 10 MPa pour P_0 correspondant à une profondeur de 1 km environ, et les exposants 4 et 1/24 ont été déterminés comme les plus cohérents avec les données réelles par Pride (2005).

La principale hypothèse de la théorie présentée précédemment et issue des travaux de Walton (1987), est que les déformations normale et tangentielle d'un ensemble de deux grains ont lieu simultanément. Ce n'est pas le cas pour le modèle de Hertz-Mindlin (Mindlin, 1949) où les forces de pression et de cisaillement sont découplées. Cependant, dans l'approximation de la propagation des ondes mécaniques, les forces de pression sont dues à la pression de confinement et sont très largement supérieures aux forces de cisaillement dues au fait que les déformations associées aux ondes sont très faibles (hypothèses des petits déplacements). La théorie de Jenkins *et al.* (2005) prédit que le mouvement d'une particule peut dévier du champ de déformation moyen homogène défini dans le milieu effectif homogène. Brandt (1955) propose une homogénéisation de K_D et G_D pour un empilement de sphères de caractéristiques mécaniques identiques mais de tailles variables. D'autres auteurs (Dvorkin & Nur, 1996) prennent en compte les différences de cimentation dans les sables ; le ciment modifiant les modules mécaniques et la porosité suivant ses caractéristiques.

On a donc des méthodes d'homogénéisation variées, plus ou moins simplificatrices, et surtout dépendantes fortement du milieu étudié. Par souci de simplicité, la théorie de Walton (1987) généralisée par Pride (2005) sera celle utilisée dans les simulations numériques.

1.4.3.2 Matériaux consolidés

Dans les milieux consolidés, les grains de minéraux variés (voir partie 1.3) sont cimentés entre eux. L'analyse faite précédemment qui considère les contacts entre grains pour les matériaux non consolidés n'a plus lieu d'être, le squelette se comportant comme un solide unique avec des vides. La difficulté pour déterminer des caractéristiques mécaniques effectives vient alors de l'agencement des grains qui peuvent être de nature variée (première homogénéisation) et du ciment qui les relie. Le module d'incompressibilité du milieu sec (ou drainé) s'exprime d'une manière exacte, sans incidence de la géométrie ou de la concentration des pores, de la façon suivante (en fonction du module d'incompressibilité moyen des minéraux K_s (voir partie 1.3), du volume des grains V_s , du volume des pores V_v , de la pression de confinement P_c et de la pression interstitielle dans les pores P_f) :

$$\frac{1}{K_D} = \frac{1}{K_s} + \frac{1}{V_s} \left. \frac{\partial V_v}{\partial P_c} \right|_{P_f} . \quad (1.27)$$

En tenant compte de la géométrie et de la concentration des pores via la porosité, on obtient l'équation suivante,

$$\frac{1}{K_D} = \frac{1}{1 - \phi} \left(\frac{1}{K_s} + \frac{\partial \phi}{\partial P_c} \right) . \quad (1.28)$$

Ces équations sont exactes en faisant les hypothèses suivantes :

- le milieu est supposé isotrope, linéaire, poreux et élastique,
- la température est supposée constante, seule la pression varie,
- les effets anélastiques, telle que la friction et la viscosité sont négligés,
- on considère toujours le contexte de l'élasticité linéaire avec des déplacements faibles et des contraintes et déformations croissantes.

A partir de ces équations, de nombreuses lois effectives ont été développées ; le livre de Mavko *et al.* (2009) en résume certaines. Par exemple, en se basant sur des cavités de forme sphériques ou ellipsoïdales, (Berryman, 1980a,b; Korrinda *et al.*, 1979), on peut calculer des modules effectifs en fonction des modules mécaniques des grains (K_s et G_s), de la porosité ϕ et d'un paramètre décrivant la forme des cavités. Les fonctions reliant ces paramètres sont non linéaires et il existe en général un couplage entre les expressions de K_D et G_D . Pride (2005) propose d'utiliser les formules empiriques suivantes qui sont cohérentes avec les données mesurées sur des grès (Castagna *et al.*, 1993)

$$\begin{aligned} K_D &= K_s \frac{1 - \phi}{1 + cs \phi} , \\ G_D &= G_s \frac{1 - \phi}{1 + \frac{3}{2} cs \phi} . \end{aligned} \quad (1.29)$$

Le paramètre cs appelé "paramètre de consolidation" caractérise le degré de consolidation du squelette qui dépend de la forme des pores et du rapport G_s/K_s . Ces relations simplifiées sont utilisables pour les matériaux consolidés (grès, par exemple) avec un paramètre de consolidation cs compris entre 2 (très consolidé) et 20 (peu consolidé).

Ce sont ces relations qui sont utilisés dans les simulations numériques présentées dans le chapitre 2.

1.5 Milieu poreux = milieu drainé + phase fluide

La description du milieu global biphasique se fait par l'association de la matrice solide (milieu drainé) et de la phase fluide équivalente (voir figure 1.4). Les caractéristiques physiques (inertielles et mécaniques) dépendent donc de l'agencement des deux phases équivalentes et de leurs interactions. Différentes théories, prenant plus ou moins en compte la complexité et l'hétérogénéité des phases, permettent de faire cette homogénéisation. Berryman & Pride (1998) démontrent que les mesures de contraintes, pressions de pores ou changements de volumes, obtenues en laboratoires par des essais triaxiaux ou œdométriques sont corrélées aux théories d'homogénéisation.

1.5.1 Termes inertiels (ρ_f , ρ et $\tilde{\rho}(\omega)$)

La masse volumique du milieu poreux est simplement définie comme la moyenne arithmétique des masse volumiques fluide et solide pondérées par leurs volumes respectifs (via la porosité) tel que

$$\rho = (1 - \phi) \rho_s + \phi \rho_f . \quad (1.30)$$

Cette masse volumique du milieu poreux est le premier des trois termes inertiels entrant en jeu dans les équations de la poroélastodynamique (système 1.7). Les deux autres sont la masse volumique du fluide ρ_f et le terme de résistance à l'écoulement $\tilde{\rho}(\omega)$ (défini par l'équation 1.21). On a vu dans le paragraphe 1.1.2 que $\tilde{\rho}(\omega)$ avait une forte dépendance fréquentielle. La figure 1.6 montre les variations des paramètres de densité en fonction de la porosité (à la fréquence de 200 Hz) et donc de la structure du squelette. La masse volumique ρ_f est logiquement constante, car indépendant de la géométrie de la matrice solide (voir partie 1.2). La masse volumique ρ est linéaire vis-à-vis de la porosité et égal à la masse volumique du solide pour $\phi = 0$ et à la masse volumique du fluide pour $\phi = 1$ (équation 1.30). Si le milieu poreux considéré est consolidé, tous les paramètres de densité diminuent quand la porosité augmente, ce qui correspond à une augmentation du volume du fluide.

Le terme de densité $\tilde{\rho}(\omega)$ a un comportement singulier quand la porosité tend vers 0 (voir équation 1.21). Cependant, le vecteur de déplacement relatif fluide/solide ($\vec{w} = \phi (\vec{u}_f - \vec{u}_s)$, équations 1.7) tend vers 0 dans ce cas-là et donc les termes $C \nabla \cdot \vec{u}$, $M \nabla \cdot \vec{w}$ et $\tilde{\rho}(\omega) \vec{w}$ des équations différentielles s'annulent. Ainsi, il n'y a pas de contributions singulières. Il faut noter que, pour ce cas particulier où $\phi = 0$, on retrouve la partie inertielle des équations de l'élastodynamique (système 1.5) en posant $\tilde{\rho}(\omega) = 0$. D'autre part, quand la porosité tend vers la valeur 1, le milieu devient un fluide pur et donc le terme $\tilde{\rho}(\omega)$, qui décrit les interactions entre fluide et solide, atteint un minimum car il n'y a quasiment plus d'interactions visqueuses entre les deux phases.

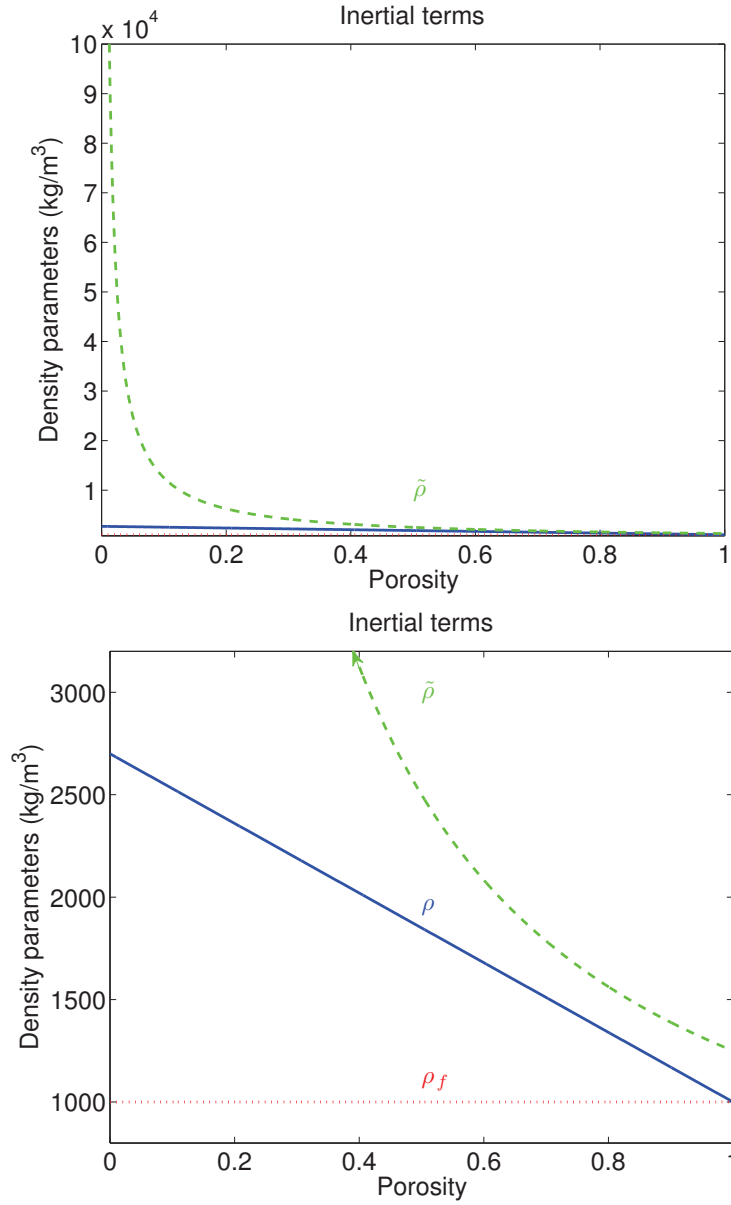


FIGURE 1.6 – Variations des paramètres inertiels (ρ_f , ρ et $\tilde{\rho}(\omega)$) en fonction de la porosité ϕ . La figure du bas est un zoom à basse densité de la figure du haut. La masse volumique fluide ρ_f est tracée en pointillés rouges, la masse volumique moyenne ρ est tracée en trait bleu continu et le terme de résistance à l'écoulement $\tilde{\rho}(\omega)$ en tiretés verts. Ces termes sont calculés à partir des équations 1.30 pour ρ et 1.21 pour $\tilde{\rho}(\omega)$ et des paramètres définis dans le tableau 1.1.

1.5.2 Modules mécaniques du milieu poreux (K_U , G , C et M)

Les modules mécaniques entrant en jeu dans les équations de la poroélastodynamique (système 1.7) sont issus de l'homogénéisation de la phase fluide avec la phase solide. Ils sont au nombre de quatre : trois modules d'incompressibilité K_U , C et M et un module de cisaillement G . Ces termes sont complexes et fréquemment dépendants mais on peut obtenir une

approximation réelle constante en faisant l'hypothèse basse fréquence.

Le module G est indépendant du fluide qui ne reprend pas les cisaillements et est donc égal au module de cisaillement G_D du squelette (equations 1.23 ou 1.29). Ce module est mesurable en laboratoire par un essai de cisaillement. De façon similaire à la définition expérimentale du module drainé K_D (voir équation 1.22), on peut mesurer K_U par un essai triaxial non drainé, c'est-à-dire en mesurant la déformation sans mouvement de fluides, suivant l'expression

$$K_U = - \left(\frac{\delta P_c}{\delta V/V_0} \right)_{\nabla \cdot \vec{w}=0} . \quad (1.31)$$

On peut également déduire de ce type d'essai le coefficient de Skempton B (Skempton, 1954) qui représente la part de la pression de confinement P_c qui se transfère sur la pression interstitielle P_f pour un échantillon non drainé soumis à des contraintes isotropes :

$$B = - \left(\frac{\delta P_f}{\delta P_c} \right)_{\nabla \cdot \vec{w}=0} . \quad (1.32)$$

Ce coefficient vaut 1 pour un liquide incompressible et vaut 0 pour un fluide infiniment compressible. On en déduit alors les deux modules des équations de la poroélastodynamique, le module de Biot C et le coefficient de rétention fluide M suivant les expressions

$$\begin{aligned} C &= B K_U , \\ M &= \frac{B K_U}{\alpha} , \end{aligned} \quad (1.33)$$

avec la constante α définie par Biot & Willis (1957) par l'expression

$$\alpha = \frac{1 - K_D/K_U}{B} . \quad (1.34)$$

1.5.3 Relations de Gassmann (1951)

Pour relier les définitions macroscopiques des paramètres K_U , C et M (équations 1.31 et 1.33) aux paramètres microscopiques issus de la définition de la phase fluide et du squelette solide drainé, Gassmann (1951) a formulé des relations prenant en compte l'effet du fluide sur les paramètres de la matrice solide. Les relations de Gassmann (1951) sont formulées en faisant l'hypothèse que la matrice solide est isotrope et uniforme. Berryman (1999) rappelle l'origine physique de ces équations. Ces relations constituent une approximation basse fréquence c'est-à-dire que les modules K_U et B sont indépendants de la fréquence et s'expriment de façon exacte en fonction des paramètres du squelette et du fluide (K_D , ϕ , K_s et K_f) de la façon suivante

$$\begin{aligned} B &= \frac{1/K_D - 1/K_s}{1/K_D - 1/K_s + \phi (1/K_f - 1/K_s)} , \\ K_U &= \frac{K_D}{1 - B (1 - K_D/K_s)} . \end{aligned} \quad (1.35)$$

On en déduit la constante de Biot-Willis $\alpha = 1 - K_D/K_s$ qui est donc indépendante du fluide, les caractéristiques du fluide étant uniquement contenues dans le terme d'incompressibilité fluide K_f , d'où le nom de "fluid substitution equations" parfois utilisé pour les relations

de Gassmann. En effet, ces équations définissent directement le changement dans les modules globaux du milieu biphasique quand un fluide est substitué par un autre dans un milieu biphasique. On en déduit ensuite les relations de Biot-Gassmann (Gassmann, 1951; Biot & Willis, 1957) en formulant les modules C et M de façon similaire :

$$\begin{aligned} K_U &= \frac{\phi K_D + (1 - (1 + \phi) K_D/K_s) K_f}{\phi (1 + \Delta)} , \\ C &= \frac{(1 - K_D/K_s) K_f}{\phi (1 + \Delta)} , \\ M &= \frac{K_f}{\phi (1 + \Delta)} , \\ \alpha &= 1 - \frac{K_D}{K_s} , \end{aligned} \tag{1.36}$$

avec

$$\Delta = \frac{1 - \phi K_f}{\phi K_s} \left(1 - \frac{K_D}{(1 - \phi) K_s} \right) . \tag{1.37}$$

On a défini ainsi les quatre modules mécaniques entrant en jeu dans les équations de la poroélastodynamique (système 1.7) qui sont indépendants de la fréquence si on fait l'approximation basse fréquence de Biot-Gassmann. Ces paramètres mécaniques sont cependant tous dépendants de la porosité ϕ et donc de l'agencement des grains. La figure 1.7 décrit les variations de ces paramètres en fonction de la porosité et donc de la teneur en fluide du milieu poreux. Comme le milieu est consolidé et non drainé, tous les paramètres mécaniques diminuent quand la porosité augmente. Les limites sont celle d'un solide sans cavité pour $\phi = 0$ et d'un fluide pur pour $\phi = 1$. Le paramètre M est singulier quand ϕ tend vers 0 mais comme pour le terme inertiel $\tilde{\rho}(\omega)$ qui est également associé aux interactions fluide/solide, on résout ces singularités en posant $M = \tilde{\rho}(\omega) = 0$ pour $\phi = 0$, ce qui permet de retrouver les équations de l'élastodynamique (système 1.5).

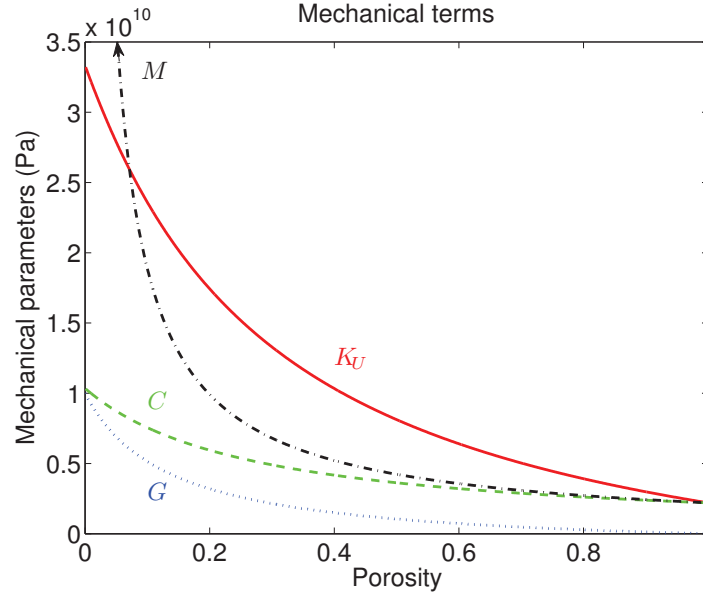


FIGURE 1.7 – Variations des paramètres mécaniques (K_U , G , C et M) en fonction de la porosité ϕ . Le module d'incompressibilité non drainé K_U est tracé en trait continu rouge, le module de cisaillement du milieu poreux G en pointillés bleus, le module de Biot C en tiretés verts et le coefficient de rétention fluide M en pointillés-tiretés noirs. Les modules d'incompressibilités K_U , C et M sont calculés à partir des équations de Biot-Gassmann (équations 1.36) et G à partir de l'équation 1.29 grâce aux paramètres du tableau 1.1.

1.5.4 Autres théories d'homogénéisation en approximation basse fréquence

Les relations de Biot-Gassmann présentées dans la partie précédente sont utilisées communément pour l'analyse de la propagation des ondes en milieu poreux si on fait l'hypothèse que celui-ci est homogène et isotrope. Ces hypothèses peuvent paraître trop simplificatrices au vu de la complexité et l'hétérogénéité inhérentes aux matériaux réels. Cependant, les essais de laboratoire de Rasolofosaon & Zinszner (2002, 2007) ont montré de bonnes concordances entre les valeurs de K_U et G prédites par la relations de Gassmann et celles mesurées par des essais triaxiaux. De nombreuses autres théories prenant plus ou moins en compte la complexité des homogénéisations ont été formulées (voir Mavko *et al.* (2009) pour un panorama exhaustif). Brown & Korringa (1975) ont généralisé les équations de Gassmann pour le cas où la phase solide est hétérogène en calculant deux modules complémentaires K_S et $K_{\phi S}$ qui décrivent l'effet sur les volume total V_T et des pores V_v d'un incrément égal sur la pression de confinement P_c et la pression de pore P_f . Ces modules s'expriment suivant les expressions

$$\begin{aligned} \frac{1}{K_S} &= -\frac{1}{V_T} \left(\frac{\partial V_T}{\partial P_c} \right) \Big|_{P_c - P_f = \text{constante}}, \\ \frac{1}{K_{\phi S}} &= -\frac{1}{V_v} \left(\frac{\partial V_v}{\partial P_c} \right) \Big|_{P_c - P_f = \text{constante}}. \end{aligned} \quad (1.38)$$

Les modules généralisés s'expriment alors par

$$G = G_D,$$

$$\frac{K_U}{K_S - K_U} = \frac{K_D}{K_S - K_D} + \frac{K_{\phi S}}{K_S} \frac{K_f}{\phi (K_{\phi S} - K_f)} . \quad (1.39)$$

Ces relations, comme celles de Gassmann, ne sont valables que dans le régime basse fréquence pour un milieu isotrope et saturé. Gassmann (1951) a également développé les équations pour des milieux anisotropes en définissant les paramètres du tenseur anisotrope, tenseur qui relie contraintes et déformations pour les milieux poreux anisotropes. De même, Brown & Korrington (1975) ont formulé les équations généralisées pour les milieux hétérogènes anisotropes. Une autre hypothèse concernant l'utilisation des relations de Gassmann est que le fluide saturant a un module de cisaillement nul. Ciz & Shapiro (2007) ont généralisé les équations de Gassmann pour un solide remplissant les pores. Pour un milieu isotrope, les modules d'incompressibilité et de cisaillement équivalents s'expriment par les relations

$$\begin{aligned} \frac{1}{K_U} &= \frac{1}{K_D} - \frac{(1/K_D - 1/K_s)^2}{\phi (1/K_{s_{pore}} - 1/K_s) + (1/K_D - 1/K_s)} , \\ \frac{1}{G} &= \frac{1}{G_D} - \frac{(1/G_D - 1/G_s)^2}{\phi (1/G_{s_{pore}} - 1/G_s) + (1/G_D - 1/G_s)} . \end{aligned} \quad (1.40)$$

Les modules $K_{s_{pore}}$ et $G_{s_{pore}}$ sont ceux du solide contenu dans les pores : on retrouve les équations de Gassmann classiques si on pose $G_{s_{pore}} = 0$.

Ainsi, comme pour l'homogénéisation des grains en une matrice solide (paragraphe 1.4.3), l'homogénéisation de la phase fluide avec la matrice drainée peut être décrite par des lois analytiques simples qui peuvent être complexifiées suivant l'hétérogénéité du milieu considéré. Pour les simulations numériques du chapitre suivant, on utilisera les relations classiques de Biot-Gassmann (Gassmann, 1951; Biot & Willis, 1957).

Conclusion partielle

La théorie de Biot (1956), associée aux relations de Gassmann (1951) qui relient les paramètres du squelette solide et ceux du fluide interstitiel, décrit la propagation des ondes sismiques dans les milieux biphasiques : cela constitue la base des équations de la poroélastodynamique. Les variations sont ensuite uniquement dues aux complexités de description de chaque phase : plusieurs phases fluides de compressibilité différentes, grains solides hétérogènes et anisotropes, squelettes hétérogènes (multiporosité) et anisotropes, milieux non saturés... Dans ce chapitre, on s'est limité aux théories d'homogénéisation simples, ce qui conduit à considérer un seul terme dépendant de la fréquence : le terme inertiel $\tilde{\rho}(\omega)$. Les autres termes, notamment les modules mécaniques K_U , C et M sont supposés indépendants de la fréquence. De nombreuses autres théories d'homogénéisation sont possibles, tout en se ramenant à un milieu effectif utilisant les lois de Biot-Gassmann pour la propagation des ondes, mais en calculant des modules mécaniques fréquemment dépendants afin de considérer des milieux consolidés ou non, saturés ou non, avec une matrice ayant deux types de porosité différentes...

Toutes ces théories prennent en compte des paramètres et donc des attributs sismiques (vitesses et atténuations) fortement dépendants de la fréquence. On a montré dans ce chapitre que l'onde de Biot spécifique aux milieux poreux a un comportement très dispersif et un régime (diffusif ou propagatif) variable suivant la fréquence. D'autre part, les approximations élastiques ou viscoélastiques généralement utilisées pour la propagation des ondes sismiques sont trop

réductrices car on ne peut alors pas considérer tous ces phénomènes dépendants de la fréquence et notamment les atténuations des ondes reliées aux facteurs de qualité qui sont très variables suivant la fréquence. Il est donc raisonnable d'essayer d'aborder la résolution des équations de la poroélastodynamique dans le domaine des fréquences, comme nous allons le faire dans le chapitre suivant.

Chapitre 2

Propagation des ondes dans les milieux biphasiques : modélisation numérique

Sommaire

2.1	Méthode Galerkin discontinue en fréquence	50
2.1.1	Résumé	50
2.1.2	Introduction	51
2.1.3	Equations de la poroélasticité	53
2.1.3.1	Homogénéisation des milieux poreux	53
2.1.3.2	Théorie de Biot	54
2.1.3.3	Lenteurs des ondes	55
2.1.3.4	Homogénéisation des paramètres	55
2.1.4	Méthode Galerkin discontinue dans le domaine fréquence-espace . . .	57
2.1.4.1	Approche fréquence-espace	57
2.1.4.2	Formulation Galerkin discontinue	57
2.1.5	Aspects numériques	59
2.1.5.1	Stratégie de maillage	60
2.1.5.2	Conditions de bord absorbantes : PML	61
2.1.5.3	Estimation du coût numérique	65
2.1.5.4	Implémentation de la source	65
2.1.6	Validation des trois régimes de l'onde de Biot : cas d'une interface plane entre deux milieux	67
2.1.7	Milieu variable latéralement	70
2.1.8	Conclusion	75
2.1.9	Remerciements	75
2.1.10	Annexe A : matrices de projection	75
2.2	Surface libre et ondes de surface	77
2.2.1	Implémentation numérique	77
2.2.2	Validation et exemples de simulations d'ondes de surface	78
2.2.2.1	Validation de l'implémentation de la surface libre	78
2.2.2.2	Influence de l'onde de Biot sur les ondes de surface	82

Introduction

Dans le chapitre précédent, les descriptions physiques des milieux biphasiques ont été abordées, l'homogénéisation des phases fluides et solides conduisant à un milieu effectif sur lequel les équations dynamiques sont appliquées (Biot, 1956; Gassmann, 1951). Pour résoudre ces équations de propagation d'onde dans des milieux complexes, plusieurs méthodes numériques existent : la méthode numérique utilisée et décrite dans l'article publié dans la revue *Geophysics* (Dupuy *et al.*, 2011), les méthodes de réflectivité (De Barros & Dietrich, 2008) permettant de calculer les champs poroélastiques de façon analytique dans chaque couche et de propager les champs aux interfaces par le calcul des coefficients de réflexion/transmission. Cette méthode, efficace numériquement, est néanmoins limitée aux milieux stratifiés plans.

La méthode d'éléments finis discontinus décrite dans ce chapitre permet de considérer des milieux complexes et structurellement hétérogènes grâce à une discrétisation du milieu par des éléments triangulaires. L'article présenté dans la première partie du chapitre décrit la méthode numérique pour un degré d'interpolation P0 et donne quelques exemples de validation du code. Le développement pour les ordres d'interpolations plus grand (P1 et P2) est présenté en annexe A. La validation du code a été réalisée avec un code basé sur une méthode de réflectivité qui est lui-même validé avec un code différences finies en temps dans l'annexe B. La validation de la prise en compte de la surface libre est ensuite présentée dans la dernière partie du chapitre ainsi que quelques exemples de sensibilité des ondes de surface suivant le milieu poroélastique considéré.

2.1 Propagation d'ondes sismiques dans les milieux poreux hétérogènes formulée dans le domaine fréquence-espace avec une méthode Galerkin Discontinue

Wave propagation in heterogeneous porous media formulated in the frequency-space domain using a discontinuous Galerkin method

B. Dupuy, L. De Barros, S. Garambois and J. Virieux

Geophysics, 2011, **VOL. 76**, NO. 4 (JULY-AUGUST 2011); P. N13–N28175

2.1.1 Abstract

Biphasic media with a dynamic interaction between fluid and solid phases must be taken into account to accurately describe seismic wave amplitudes in subsurface and reservoir geophysical applications. Then, the modelling of the wave propagation in heterogeneous porous media, which includes the frequency-dependent phenomena of the fluid-solid interaction, is considered for 2D geometries. From the Biot-Gassmann theory, we have deduced the discrete linear system in the frequency domain for a discontinuous finite-element method, known as the nodal discontinuous Galerkin method. Solving this system in the frequency domain allows accurate modelling of the Biot wave in the diffusive/propagative regimes, enhancing the importance of frequency effects. Because we had to consider finite numerical models, we implemented perfectly matched layer techniques. We found that waves are efficiently absorbed at the model boundaries and that the discretisation of the medium should follow the same rules as in the

elastodynamic case, that is, 10 grids per minimum wavelength for a P0 interpolation order. The grid spreading of the sources, which could be stresses or forces applied on either the solid phase or the fluid phase, did not show any additional difficulties compared to the elastic problem. For a flat interface separating two media, we compared the numerical solution and a semi-analytic solution obtained by a reflectivity method in the three regimes where the Biot wave is propagative, diffusive/propagative, and diffusive. In all cases, fluid-solid interactions were reconstructed accurately, proving that attenuation and dispersion of the waves were correctly accounted for. In addition to this validation in layered media, we have explored the capacities of modeling complex wave propagation in a laterally heterogeneous porous medium related to steam injection in a sand reservoir and the seismic response associated to a fluid substitution.

Keywords

Confined flow, finite element analysis, flow through porous media, frequency-domain analysis, Galerkin method, geophysical fluid dynamics, hydrocarbon reservoirs, sand, seismic waves, seismology

2.1.2 Introduction

For many geophysical applications such as those related to reservoir issues (oil, gas, or CO_2 storage) or geotechnical problems (slope stability, water resources), it is essential to consider a biphasic material marked by a dynamic interaction between fluid and solid phases to describe seismic wave amplitudes accurately. Since the pioneer works of Biot (1956) and Gassmann (1951) on poroelastodynamics, analytic and numerical methods have been developed for the simulation of wave propagation in biphasic porous media.

For simple cases, analytic solutions are available, such as those proposed by Burridge & Vargas (1979), who identify clearly the three waves predicted by the work of Biot, or those of Boutin *et al.* (1987) who compute analytic Green's functions in a stratified saturated porous medium. Plona (1980), who is the first to observe the Biot slow wave, carries out an experimental validation. Reflectivity methods solve these equations in simple 3D stratified media (Stern *et al.*, 2003; De Barros & Dietrich, 2008), and permit the study of their electrokinetic coupling (Haartsen & Pride, 1997; Garambois & Dietrich, 2002) and the necessity to take into account the Biot slow wave for seismo-electromagnetic characterization (Pride & Garambois, 2002, 2005).

Considering lateral heterogeneities requires numerical methods based on volumetric discretisation for solving equations of poroelastodynamics. The most popular of these techniques are the finite-difference methods (FDM) as used, for example, by Dai *et al.* (1995), who observe the "slow" P-wave influence on attenuation in synthetic and real data. More recently, Wenzlau & Muller (2009) use the velocity-stress finite-difference method to study fluid-diffusion processes in planar cracks, illustrating that FDM is limited to rather simple geometries. Using the accurate spectral-element method (SEM), Morency & Tromp (2008) investigate the validity of Biot theory in media with porosity gradients, and Morency *et al.* (2009) perform the analysis of finite-frequency kernels needed for the reconstruction of medium parameters. Similarly, the discontinuous Galerkin method (DGM) in the time domain (de la Puente *et al.*, 2008) is successfully used to compute wave propagation in saturated anisotropic porous media with

complex discontinuity geometries. In their review, Carcione *et al.* (2010) sum up the approaches previously described.

Most of these numerical approaches in the time domain assume some simplifications in the interaction between solid and fluid phases, called low-frequency approximation in our presentation of the Biot theory. Masson & Pride (2010) show that considering the effects of all frequencies and not only low-frequency approximation is essential for a correct estimation of the Biot wave amplitude. Therefore, if we are interested in computing the entire wave signal taking into account the Biot wave and the P- and S-waves, we should take into account the dispersive effects related to the frequency dependence of poroelastic parameters. Moreover, for superficial saturated media where fluid/solid interactions prevail, the low-frequency approximation is no more a valid approximation whatever is the regime of the Biot wave. Consequently, solving poroelastodynamics in the frequency domain will improve our description of the physical behavior between solid and fluid phases.

From the numerical point of view, these numerical methods in the time domain share the difficult issue of having to use very small time steps when considering a viscous fluid. Carcione (1996) show how to turn around this difficulty by using a partition method (Carcione & Goode, 1995), although it requires local eigenvalue decomposition : the partial differential system to be solved is decomposed into two sets, one stiff and the other non-stiff. The first one is solved implicitly and, the other one is solved explicitly using Runge-Kutta integration with the Courant-Friedrichs-Levy (CFL) condition related to wave propagation characteristics in solid media. Masson & Pride (2010) underline that the CFL stability condition is strongly related to the values of the fluid viscosity. They show that, for typical values of saturated media, the limitation is not so drastic when adequate convolution is performed to consider frequency effects.

The formulation of the diffusion/propagation problem in the frequency domain will avoid the difficult issue of small time-integration steps at the expense of solving a sparse linear system. This approach is proposed by many authors for problems of visco-elastodynamics (Stekl & Pratt, 1998; Hustedt *et al.*, 2004; Plessix, 2007; Brossier *et al.*, 2008b). The approach is efficient when considering full-waveform inversion if we can use a direct-solver approach : we can efficiently solve the forward problem for many sources, a linear system with multiple right-hand-sides (Pratt *et al.*, 1998; Plessix, 2006; Brossier *et al.*, 2009b), thanks to the LU decomposition performed once for the medium (this step is sometimes called the factorization step). The solving step, which comprises an efficient downward and upward substitution to get the solution, is performed for each source.

Here, we investigate the feasibility of 2D wave-propagation modeling for porous media in the frequency domain while including a complete dispersion and diffusion description, thanks to the frequency formulation. We will consider a discontinuous Galerkin method (DGM), which is shown to be quite efficient for 2D geometries with complex interface geometries (Brossier *et al.*, 2008b).

First, we present the description of a biphasic porous medium as well as the Biot theory of poroelastodynamics. Then, we outline the numerical steps of the DGM constructing the linear system, which can be solved by a direct solver for 2D geometries. We compare in some simple examples the numerical DGM results with analytic solutions and semi-analytic results based on boundary integral equations. Finally, we illustrate wave propagation in a laterally variable medium before outlining perspectives and conclusions.

2.1.3 Poroelastic governing equations

The introduction of poroelastodynamics is related to strong amplitude variations one can observe in practice, especially for shallow seismic experiments. In this work, we focus our investigation only on porous elastodynamics, for simplicity. Extension for including attenuation and viscous mechanisms, which also control the amplitude variations, are then straightforward when considering frequency formulation, an advantage we should keep in mind, leading to viscoporoelastodynamics to be considered for real applications. Moreover, the frequency formulation can easily be adapted to take into account more complex physical phenomena such as partial saturation (White, 1975; Dutta & Odé, 1979) or double porosity (Pride & Berryman, 2003a).

2.1.3.1 Porous media homogenisation

The description of porous media requires a homogenization approach of both fluid and solid phases to deduce an equivalent medium (Burridge & Vargas, 1979). The porosity $\phi = V_V/V_T$, which is the ratio between void and total volumes, defines the respective proportions of fluid and solid phases. The fluid and associated flows through the solid matrix are described by an uncompressibility modulus K_f , a density ρ_f , and a viscosity η . A nonviscous fluid has a viscosity η equal to zero. The viscosity can be formulated with the intrinsic permeability k_0 introduced in Darcy's law. Auriault *et al.* (1985) and Johnson *et al.* (1987) generalize this law with a dynamic permeability $k(\omega)$ depending on the pulsation ω (assuming a time dependency in $e^{-i\omega t}$; the imaginary number i is such that $i^2 = -1$). This permeability, which is a complex number, has significant frequency dependence as defined through the dispersive relation

$$k(\omega) = \frac{k_0}{\sqrt{1 - iP\frac{\omega}{\omega_c} - i\frac{\omega}{\omega_c}}}. \quad (2.1)$$

The nondimensional number P is taken by default equal to 0.5 but does not have much influence in seismic frequency bands (Pride, 2005). The cut-off pulsation ω_c allows separating the low-frequency domain, where viscous effects are dominant, from the high-frequency one, where inertial effects prevail. Using Archie's law, the pulsation ω_c is defined as

$$\omega_c = \frac{\eta}{\rho_f k_0 \phi^{-m}}, \quad (2.2)$$

where the cementation exponent m is related to the electrical cementation factor and to the pore tortuosities (Brown, 1980). Then we can introduce the flow resistance density term $\tilde{\rho}$, which describes the dynamic loss of energy due to the fluid flow with explicit frequency dependence. The term is responsible for the intrinsic scattering of waves in the Biot poroelasticity theory (Biot, 1956), and it is expressed in the frequency domain as

$$\tilde{\rho} = \frac{i\eta}{\omega k(\omega)}. \quad (2.3)$$

The solid skeleton is entirely described by the association of grains (defined by an uncompressibility modulus K_s , a shear solid modulus G_s , and a solid density ρ_s) in a solid matrix. If different mechanical structures exist in the skeleton, we assume that homogenization has already been performed. This solid skeleton is, therefore, described by an uncompressibility

drained modulus K_D , a shear modulus G , and a consolidation parameter cs . With the help of the porosity, empirical formulas (Pride, 2005) defined as

$$\begin{aligned} K_D &= K_s \frac{1 - \phi}{1 + cs \phi}, \\ G &= G_s \frac{1 - \phi}{1 + \frac{3}{2} cs \phi} \end{aligned} \quad (2.4)$$

link mineral properties to the parameters that characterize the skeleton itself. The consolidation parameter cs and the porosity ϕ are key ingredients for upscaling constitutive parameters.

Homogenization of the solid and fluid phases leads to the following definitions of various mechanical quantities required for dynamic mechanical modeling. The density of the porous medium is the arithmetic mean of fluid and solid phases weighted by their own volumes via the porosity, so that

$$\rho = (1 - \phi) \rho_s + \phi \rho_f. \quad (2.5)$$

The introduction of the undrained incompressibility modulus K_U , the Biot C modulus, and the fluid-storage coefficient M allows the explicit description of the homogenized porous medium through the Gassmann relations (Gassmann, 1951). Relationships between the coefficients K_U , C and M and the modulus functions of K_D , K_s , K_f and ϕ are given by

$$\begin{aligned} K_U &= \frac{\phi K_D + (1 - (1 + \phi) K_D/K_s) K_f}{\phi (1 + \Delta)}, \\ C &= \frac{(1 - K_D/K_s) K_f}{\phi (1 + \Delta)}, \\ M &= \frac{K_f}{\phi (1 + \Delta)}, \end{aligned} \quad (2.6)$$

with the additional expression

$$\Delta = \frac{1 - \phi}{\phi} \frac{K_f}{K_s} \left(1 - \frac{K_D}{(1 - \phi) K_s} \right). \quad (2.7)$$

The shear modulus of the porous medium G is independent of the fluid characteristics and therefore equal to the shear modulus of the drained solid skeleton through the relation 2.4, where only the porosity ϕ and the consolidation parameter cs are involved.

2.1.3.2 Biot theory

Biot (1956) determines dynamic equations that govern particle motions in saturated porous media following five physical assumptions : (1) the characteristic wavelength is larger than the elementary representative volume; (2) small displacements are considered for the solid and fluid phases; (3) only a saturated medium with a continuous liquid phase is investigated, and the porosity is isotropic; (4) the solid matrix is (visco)elastic isotropic; (5) only mechanical coupling is considered, and other couplings are excluded (in particular, thermomechanical and electrokinetic ones). Pride *et al.* (1992) formulate these equations in the frequency domain, assuming a time dependency in $e^{-i\omega t}$. They obtain the following system of equations :

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\tau} = -\omega^2 (\rho \vec{u} + \rho_f \vec{w})$$

$$\begin{aligned}
 \boldsymbol{\tau} &= [K_U \nabla \cdot \vec{u} + C \nabla \cdot \vec{w}] \mathbf{I} + G [\nabla \vec{u} + (\nabla \vec{u})^t - 2/3 \nabla \cdot \vec{u} \mathbf{I}] \\
 -P &= C \nabla \cdot \vec{u} + M \nabla \cdot \vec{w} \\
 -\nabla P &= -\omega^2 (\rho_f \vec{u} + \tilde{\rho} \vec{w}),
 \end{aligned} \tag{2.8}$$

where the stress tensor is denoted by $\boldsymbol{\tau}$ and the fluid pressure by P . The mean displacement of the porous medium \vec{u} is approximately equal to the mean solid displacement \vec{u}_s ($\vec{u} \simeq \vec{u}_s$) and will be the one involved in the system 2.8. Denoting the fluid displacement by \vec{u}_f , the relative fluid/solid displacement \vec{w} is defined by $\vec{w} = \phi (\vec{u}_f - \vec{u}_s)$, which will be the other field to be estimated in the numerical simulation. Solving the differential system of equations 2.8 in the frequency-space domain is the purpose of this work.

2.1.3.3 Wave slownesses

Biot theory (equation system 2.8) predicts three wave types : a compressional wave and a shear wave similar to those propagating inside an elastic body, and a slow compressional wave, called the Biot wave, which is strongly diffusive and attenuated at low frequencies. This Biot wave behaves as either a diffusive signal or a propagative wave depending on the frequency content of the source with respect to the cut-off pulsation or characteristic frequency as defined in equation 2.2. The slowness of the shear wave is given by the following equation (Pride, 2005),

$$s_S^2 = \frac{\rho - \rho_f^2 / \tilde{\rho}}{G}, \tag{2.9}$$

and the slownesses of compressional waves, the P-wave and Biot wave, are given by

$$s_P^2 = \gamma - \sqrt{\gamma^2 - \frac{4(\rho\tilde{\rho} - \rho_f^2)}{HM - C^2}} \quad , \quad s_{Biot}^2 = \gamma + \sqrt{\gamma^2 - \frac{4(\rho\tilde{\rho} - \rho_f^2)}{HM - C^2}} \tag{2.10}$$

where γ and H terms are

$$\gamma = \frac{\rho M + \tilde{\rho} H - 2\rho_f C}{HM - C^2} \quad , \quad H = K_U + \frac{4}{3}G. \tag{2.11}$$

2.1.3.4 Parameters homogenisation

The macroscale physical parameters, which are needed in the poroelastodynamic equations (system 2.8), are

- four mechanical parameters : the uncompressibility modulus K_U and the shear modulus G of the porous medium ; the Biot C modulus, which describes fluid/solid coupling ; and the storage coefficient M for the fluid behavior
- three density terms : the fluid density ρ_f , the mean density ρ , and the complex frequency-dependent flow resistance term $\tilde{\rho}$

These parameters are deduced from physical input parameters, which are the fluid ones (K_f , η , ρ_f), the mineral ones (K_s , G_s , ρ_s), and those related to the skeleton arrangement as the consolidation cs and the cementation exponent m , the porosity ϕ , and the hydraulic permeability k_0 (see Table 2.1 for typical values). Relationships (equations 2.3, 2.4, 2.5 and 2.6) between these input parameters and the poroelastodynamic parameters needed for the

forward modeling are explicit with singularities that we will discuss. For a frequency of 200 Hz and, therefore, a pulsation of 1260 rad/sec , Figure 2.1(a) presents the variations with respect to the porosity of the three density terms, and Figure 2.1(b) presents the four mechanical moduli. We observe a linear evolution of the mean density ρ with respect to the porosity ϕ . It is equal to the solid density for $\phi = 0$ and to the fluid density for $\phi = 1$. As the considered medium is consolidated, all the mechanical parameters decrease with increasing porosity, which corresponds to an increasing influence of the fluid. These parameters and the average density vary inside a bounded interval from the pure solid ($\phi = 0$) to the pure fluid ($\phi = 1$), except for two parameters.

The flow resistance term $\tilde{\rho}$ and the parameter M are singular when the porosity tends toward zero. In association with these singularities, the relative fluid/solid displacement vector ($\vec{w} = \phi (\vec{u}_f - \vec{u}_s)$) decreases to zero as well, and therefore the terms $C \nabla \cdot \vec{u}$, $M \nabla \cdot \vec{w}$ and $\tilde{\rho} \vec{w}$ in the differential equations vanish when computing the solution. Hence, we can retrieve exact elastodynamic equations by setting $M = \tilde{\rho} = 0$ for the specific case $\phi = 0$. On the other hand, when the porosity tends toward one, the medium is a complete fluid and thus the flow resistance term $\tilde{\rho}$, related to the interaction between the fluid and the solid, reaches a minimum because no more viscous interaction occurs between fluid and solid phases. We end up by modeling wave propagation for the elastic monophasic case using this poroelastic formulation, although this is not very efficient in terms of computer resources. We verified that small values of $\phi = 10^{-3}$ do not trigger any numerical instabilities in the direct solver we are using and provide nearly identical results as in the solid monophasic case at frequencies we usually consider in our different synthetic modelings.

K_s	(GPa)	40
G_s	(GPa)	10
ρ_s	(kg/m ³)	2700
K_f	(GPa)	2.2
ρ_f	(kg/m ³)	1000
η	(Pa.s)	0.001
m		1
ϕ		0.4
k_0	(m ²)	10^{-11}
cs		5
f_c	(Hz)	6400
Biot wave regime		Diffusive
V_P	(m/s)	2570
V_S	(m/s)	860
V_{Biot}	(m/s)	160

TABLE 2.1 – Physical parameters of the infinite medium. Velocities of the P-, S-, and Biot waves (V_P , V_S and V_{Biot}) are given at the central source frequency (200 Hz).

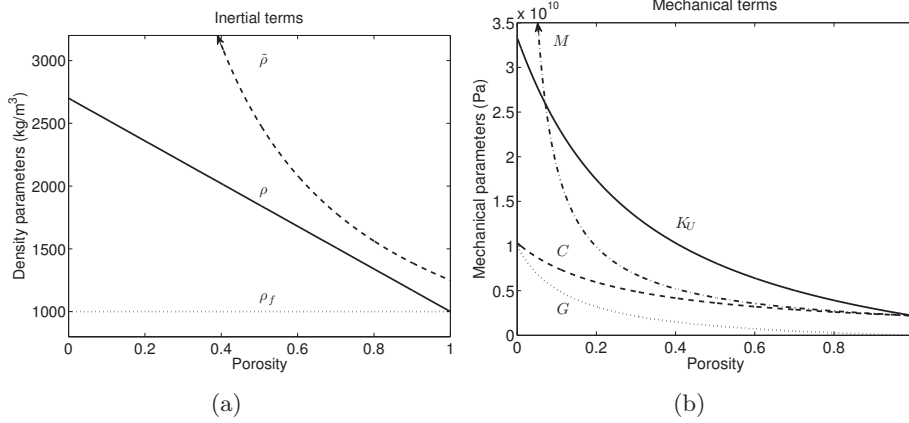


FIGURE 2.1 – Variations of parameters with respect to the porosity ϕ . (a) Density terms related to inertial effects, with the fluid density ρ_f indicated by a dotted line, mean density ρ by a continuous line, and flow resistance term $\tilde{\rho}$ by a dashed line. Please note that the flow resistance term is clipped as it goes to infinity for a porosity ϕ going to zero. (b) Mechanical terms, with the elastic parameter K_U indicated by a continuous line, parameter G by a dotted line, coupling parameter C by a dashed line, and fluid behavior parameter M by a dotted-dashed line. The clipping of the parameter M must be underlined as it goes to infinity for a porosity ϕ going to zero.

2.1.4 Discontinuous Galerkin method in frequency-space domain

2.1.4.1 Frequency-space approach

We solve partial differential equations in the frequency-space domain : volumetric methods have been extensively developed in the time-space domain, whereas boundary integral equations through a spectral formulation are more often expressed in the frequency-wavenumber domain. Solving in the frequency-space domain has begun to be considered intensively when tackling full-waveform inversion because thousands of forward problems are required to recover the medium properties. We now introduce a discontinuous finite-element method called the discontinuous Galerkin method (DGM) in the frequency domain. This method is found to be quite accurate, especially when considering complex interface geometries and topographies. Moreover, discontinuous conditions also allow considering fluid/solid interfaces. The advantages found for the elastic formulation should be valid for the poroelastic approach. More detailed descriptions of the discontinuous Galerkin method are given by Hesthaven & Warburton (2008) and, for the elastodynamic case, by Brossier (2011) and Brossier *et al.* (2010). The spatial discretization is based on triangular meshes with nodal interpolation inside each cell of the mesh, and it transforms differential equations into a linear system to be solved.

2.1.4.2 Discontinuous Galerkin formulation

In 2D heterogeneous discrete domains, we consider the discrete velocity fields (\dot{u}_x and \dot{u}_z) corresponding to the discretization of the time derivative of the mean porous displacement \vec{u} and the discrete relative velocity fields (\dot{w}_x and \dot{w}_z) corresponding to the discretization of the time derivative of the relative fluid/solid displacement \vec{w} . Three discrete stress components

$(\sigma_{xx}, \sigma_{zz}, \sigma_{xz})$ are applied to the mean porous medium, whereas only a discrete pressure field P is considered inside the fluid. This leads to eight unknowns to be estimated in each cell of the mesh, whereas one has five unknowns when considering only a solid elastic medium. We apply the following transformation for the stress/pressure component tensor

$$\mathbf{T}^t = (T_1, T_2, T_3, T_4) = \left(\frac{\sigma_{xx} + \sigma_{zz}}{2}, \frac{\sigma_{xx} - \sigma_{zz}}{2}, \sigma_{xz}, -P \right). \quad (2.12)$$

Consequently, we have the expression of pressure through the component T_1 in the mean porous medium (confining pressure) and through the component T_4 in the fluid (interstitial pressure). We consider as well the following buoyancy terms deduced from the standard density terms,

$$\rho_1 = \frac{\rho_f^2}{\tilde{\rho}} - \rho, \quad \rho_2 = \frac{\rho\tilde{\rho}}{\rho_f} - \rho_f, \quad \rho_3 = \frac{\rho_f^2}{\rho} - \tilde{\rho}, \quad (2.13)$$

which are involved in the following differential system we deduce from the system 2.8 :

$$\begin{aligned} i\omega \dot{u}_x &= \frac{1}{\rho_1} \left(s_x \frac{\partial(T_1 + T_2)}{\partial x} + s_z \frac{\partial T_3}{\partial z} - F_{\sigma_x} \right) + \frac{1}{\rho_2} \left(s_x \frac{\partial T_4}{\partial x} + F_{P_x} \right), \\ i\omega \dot{u}_z &= \frac{1}{\rho_1} \left(s_z \frac{\partial(T_1 + T_2)}{\partial z} + s_x \frac{\partial T_3}{\partial x} - F_{\sigma_z} \right) + \frac{1}{\rho_2} \left(s_z \frac{\partial T_4}{\partial z} + F_{P_z} \right), \\ i\omega \dot{w}_x &= \frac{1}{\rho_2} \left(s_x \frac{\partial(T_1 + T_2)}{\partial x} + s_z \frac{\partial T_3}{\partial z} - F_{\sigma_x} \right) + \frac{1}{\rho_3} \left(s_x \frac{\partial T_4}{\partial x} + F_{P_x} \right), \\ i\omega \dot{w}_z &= \frac{1}{\rho_2} \left(s_z \frac{\partial(T_1 + T_2)}{\partial z} + s_x \frac{\partial T_3}{\partial x} - F_{\sigma_z} \right) + \frac{1}{\rho_3} \left(s_z \frac{\partial T_4}{\partial z} + F_{P_z} \right), \\ -i\omega T_1 &= (K_U + G) \left(s'_x \frac{\partial \dot{u}_x}{\partial x} + s'_z \frac{\partial \dot{u}_z}{\partial z} \right) + C \left(s'_x \frac{\partial \dot{w}_x}{\partial x} + s'_z \frac{\partial \dot{w}_z}{\partial z} \right) - i\omega T_1^0, \\ -i\omega T_2 &= G \left(s'_x \frac{\partial \dot{u}_x}{\partial x} - s'_z \frac{\partial \dot{u}_z}{\partial z} \right) - i\omega T_2^0, \\ -i\omega T_3 &= G \left(s'_z \frac{\partial \dot{u}_x}{\partial z} + s'_x \frac{\partial \dot{u}_z}{\partial x} \right) - i\omega T_3^0, \\ -i\omega T_4 &= C \left(s'_x \frac{\partial \dot{u}_x}{\partial x} + s'_z \frac{\partial \dot{u}_z}{\partial z} \right) + M \left(s'_x \frac{\partial \dot{w}_x}{\partial x} + s'_z \frac{\partial \dot{w}_z}{\partial z} \right) - i\omega T_4^0. \end{aligned} \quad (2.14)$$

We consider absorbing conditions (*i.e.*, the functions s_i and s'_i) at the edges of the limited numerical domain through the perfectly matched layer (PML) formulation (Berenger, 1994). Functions s_x and s_z for velocity equations and s'_x and s'_z for stress equations are equal to one inside the medium and decay slowly inside PML regions. Source terms are point forces $(F_{\sigma_x}, F_{\sigma_z}, F_{P_x}, F_{P_z})$ applied on the mean porous medium or on the fluid phase. We might consider as well the external applied stresses $(T_1^0, T_2^0, T_3^0, T_4^0)$ on the mean porous medium or on the fluid phase. Based on a variational approach, a surface integration in two dimensions is performed inside each cell of the mesh sampling the medium. For simplicity's sake, a P0 approximation, *i.e.*, constant quantities inside each cell i , is considered for unknown field components in the following description, although we also implement higher order (first-order P1 and second-order P2) Lagrangian nodal interpolation inside each cell in the computer code we have developed. Using Green's theorem, the system 2.14 can be recast into a discrete form

considering four flux vectors (G^1 , G^2 , G^3 and G^4) depending on stresses for velocity estimation and five flux vectors (H^1 , H^2 , H^3 , H^4 and H^5) depending on velocities for stress estimation, giving us the discrete linear system

$$\begin{aligned}
 i\omega A_i \mathbf{V}_i &= \frac{1}{\rho_{1i}} \sum_{j \in \partial K_i} l_{ij} \mathbf{G}_{ij}^1 - \frac{1}{\rho_{2i}} \sum_{j \in \partial K_i} l_{ij} \mathbf{G}_{ij}^2 - \frac{1}{\rho_{2i}} \sum_{j \in \partial K_i} l_{ij} \mathbf{G}_{ij}^3 \\
 &- \frac{1}{\rho_{4i}} \sum_{j \in \partial K_i} l_{ij} \mathbf{G}_{ij}^4 = A_i \mathbf{F}_i, \\
 -i\omega A_i \mathbf{T}_i &= (K_{Ui} + G_i) \sum_{j \in \partial K_i} l_{ij} \mathbf{H}_{ij}^1 - C_i \sum_{j \in \partial K_i} l_{ij} \mathbf{H}_{ij}^2 - G_i \sum_{j \in \partial K_i} l_{ij} \mathbf{H}_{ij}^3 \\
 &- C_i \sum_{j \in \partial K_i} l_{ij} \mathbf{H}_{ij}^4 - M_i \sum_{j \in \partial K_i} l_{ij} \mathbf{H}_{ij}^5 = -i\omega A_i \mathbf{T}_i^0,
 \end{aligned} \tag{2.15}$$

where the surface of the cell i is denoted by A_i . The index j denotes the three neighbors of the cell i . The length of the boundaries between the current cell i and its neighbors is called l_{ij} , and fluxes are computed across these boundaries. Medium parameters are assumed to be constant inside each cell, regardless of the order we use for velocity and stress components. Source terms (external forces \mathbf{F}_i and stresses \mathbf{T}_i^0) can be merged into a source vector \mathbf{b} , which is the right-hand-side (RHS) of the system 2.15. Centered fluxes of stress components \mathbf{G}_{ij}^α and velocity components \mathbf{H}_{ij}^β are expressed as

$$\begin{aligned}
 \mathbf{G}_{ij}^\alpha &= \sum_{k \in (x,z)} \mathbf{n}_{ijk} M_k^\beta \frac{s_{k_i} \mathbf{T}_i + s_{k_j} \mathbf{T}_j}{2}, \\
 \mathbf{H}_{ij}^\beta &= \sum_{k \in (x,z)} \mathbf{n}_{ijk} N_k^\alpha \frac{s'_{k_i} \mathbf{V}_i + s'_{k_j} \mathbf{V}_j}{2}, \\
 \alpha &\in (1; 4), \quad \beta \in (1; 5), \quad k \in (x, z),
 \end{aligned} \tag{2.16}$$

where projection matrices M_x^β , M_z^β , N_x^α and N_z^α are given in appendix A. The vector \mathbf{n}_{ijk} is the normal vector of each side of the current cell i oriented toward the neighboring cell j . Combining unknowns of the cell i and the three neighboring cells j allows the construction of the sparse matrix of the left-hand side (LHS) of the linear system 2.15. We can gather the unknowns of each cell (T_i , V_i) of the mesh in a global vector \mathbf{x} we need to estimate. We end up with a linear sparse matrix system $\mathcal{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$. The number of unknowns (eight for poroelastodynamics with respect to five for elastodynamics) increases the fill-in of the sparse impedance matrix from 41 nonzero terms in elastodynamics to 104 in poroelastodynamics for the P0 order. The complex impedance matrix \mathcal{A} can be decomposed through an LU transformation (Amestoy *et al.*, 2006) only once, making very attractive solving the forward problem in the frequency domain when considering multisources as needed for seismic imaging. The impedance matrix is not symmetrical because of PML boundary conditions.

2.1.5 Numerical aspects

Four main issues should be considered when solving the linear system we have built for each frequency. First, the meshing should be considered small enough to accurately model continuous fields by discrete fields. Then, as the numerical model is always finite, we must

devise a technique to absorb waves when they hit the computational boundaries of the model. Moreover, we compare the computational costs between this approach and elastic simulations. Finally, we end this section underlining the implementation of external excitation sources.

2.1.5.1 Meshing strategy

We use triangular cells to sample spatially the medium as allowed by the discontinuous Galerkin method. Each triangular element can have its own interpolation order, leading to the p-adaptivity of the method. The P0 order consists of assuming constant values of the fields inside each cell, whereas the P1 order assumes a linear interpolation and the P2 one a quadratic interpolation. Remaki (2000) and Brossier *et al.* (2008b) show that regular meshes are required when considering the P0 order to avoid kinematic shifts in the solution, whatever the meshing discretization is. Unstructured grids could be used for the P1 and P2 orders.

The sampling strategy of the continuous medium is related to the mechanical property variations, the propagation/diffusion regimes, and the numerical method we use. The estimation of the adequate discretization requires an evaluation of the characteristic lengths of the problem : for the propagation, wavelengths could be estimated, but diffusive and dispersive Biot waves will add an extra difficulty that we should investigate numerically. Velocities of the waves (equations 2.9 and 2.10) of the two-layer consolidated soils given in Table 2.2 as a function of frequency (Figure 2.2) provide the information needed for the meshing. Unless specifically underlined, we select a discretization of the medium with 10 cells per minimum S-wavelength for a P0 order (i.e., one degree of freedom per element) because it is found to be accurate enough for elastic (Brossier *et al.*, 2008b) and poroelastic (Martin *et al.*, 2008; de la Puente *et al.*, 2008) propagation. The dimension of the cell, which should be considered, is the diameter of the inscribed circle of the triangle. The discretization of the medium is defined by the minimum propagative wave velocities, i.e., in our cases the S-wave because the propagative Biot wave has a velocity higher than the S-wave.

We will show in the next part that we do not need to discretize the diffusive Biot wave correctly. For the P1 order, we must consider the same sampling strategy for unstructured grids, whereas, for the P2 order, we might go down to 2.5 cells per minimum S-wavelength following the recommendations of Brossier *et al.* (2008a). We perform this meshing investigation for the highest computed frequency. We have not yet adapted the meshing to each frequency, and we have not yet performed an h-adaptivity by adjusting the local spatial discretization to the local values of physical parameters as possible for DGM.

	Layer 1	Layer 2a	Layer 2b	Layer 2c
K_s (GPa)	50	40	40	40
G_s (GPa)	30	10	10	10
ρ_s (kg/m ³)	2700	2700	2700	2700
K_f (GPa)	2.2	2.2	2.2	2.2
ρ_f (kg/m ³)	1000	1000	1000	1000
η (Pa.s)	0.001	0.001	0.001	10^{-7}
m	1.5	1	1	1
ϕ	0.1	0.4	0.4	0.4
k_0 (m ²)	10^{-14}	10^{-11}	10^{-9}	10^{-11}
cs	5	5	5	5
f_c (Hz)	$3.2 \cdot 10^6$	6400	64	0.64
Biot wave regime	Diffusive		Intermediate	Propagative
V_P (m/s)	4610	2570	2610	2630
V_S (m/s)	2470	860	940	960
V_{Biot} (m/s)	10	160	1170	1340

TABLE 2.2 – Physical parameters of the two-layer porous medium for the diffusive (layer 2a), intermediate (layer 2b), and propagative (layer 2c) behaviors of the Biot wave. Velocities of the P-, S-, and Biot waves (V_P , V_S and V_{Biot}) are given at the central source frequency (200 Hz).

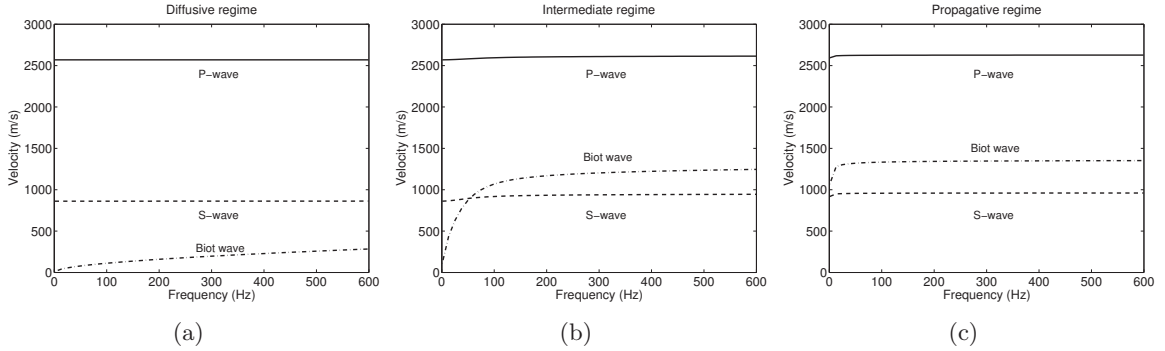


FIGURE 2.2 – Wave velocities for the three Biot regimes. Shown are the P-wave (continuous line), S-wave (dashed line), and Biot-wave (dotted-dashed line) velocities as a function of frequency for the (a) diffusive regime, (b) intermediate regime, and (c) propagative regime as defined in Table 2.2. Please note the strong variation of the Biot wave velocity with respect to the frequency related to the highly dispersive nature of this wave.

2.1.5.2 Absorbing boundary conditions : Perfectly Matched Layers

Introduced by Berenger (1994) for electromagnetism, perfectly matched layers (PML) are extensively applied by different authors to various problems. More specifically, Brossier *et al.* (2008a) and Etienne *et al.* (2009) analyze them in 2D and 3D nodal DGM elastodynamic equations using the same formulation we consider in this work. We need a specific meshing strategy inside the PML layer so that continuous lines parallel to the numerical boundary exist as we enter deeper into the PML zone because only the flux components perpendicular to

PML boundaries are efficiently damped (Brossier *et al.*, 2008a). In the corners, the meshing tentatively adapts its strategy to two contrary conditions (see Figure 2.3). The application of these constraints in the mesh design of triangles is supported by the software we are using (TRIANGLE by Shewchuk (1996)). Moreover, damping functions, as proposed by Drossaert & Giannopoulos (2007), seem to be the most efficient ones. By considering the variable r as being either x or z , these functions are expressed as

$$s_r = \frac{1}{\kappa_r + i\gamma_r},$$

$$\gamma_r(l) = B \left(1 - \cos \left(\frac{l\pi}{2 l_{PML}} \right) \right), \quad \kappa_r(l) = 1 + C \left(1 - \cos \left(\frac{l\pi}{2 l_{PML}} \right) \right), \quad (2.17)$$

with the thickness of the PML area denoted by l_{PML} and l being the distance between the cell and the edge of the PML. We look for the values of the factors B and C , which are optimal for the most efficient absorption of waves inside the PML layer.

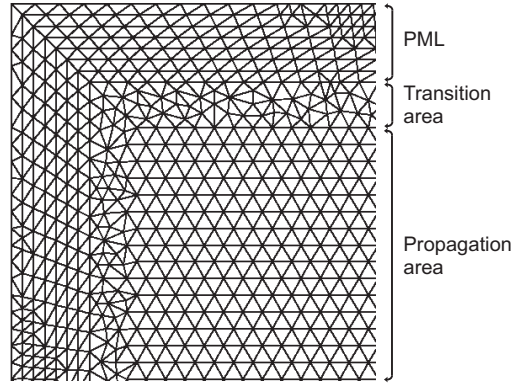


FIGURE 2.3 – Illustration of the meshing for one corner of the numerical model. The PML structure has parallel lines with respect to the outer edge, whereas a transition zone enables moving gradually to the inner structured grid based on equilateral triangles, thanks to the meshing engine we are using : TRIANGLE software by Shewchuk (1996).

With this aim, we consider a homogeneous model that is a square $70 * 70 \text{ m}$, which should be considered as infinite. The PML zones add an extra length of $2 * 5 \text{ m}$ in both directions. An explosive source is considered at the position $x = 10 \text{ m}$ and $z = 10 \text{ m}$ of the porous medium (see Figure 2.4(a)). The source time function is a Ricker signal with a central frequency of 200 Hz . Table 2.1 provides the physical values for our simulations. The parameters lead to a cut-off frequency equal to 6400 Hz , and as the frequency band (between 1 and 600 Hz) is lower than f_c , the Biot wave has a diffusive regime.

The DGM in the space-frequency domain computes the stationary field for each selected frequency. We consider 50 discrete frequencies between 1 and 600 Hz . The frequency range as high as $f_{max} = 600 \text{ Hz}$ induces a minimum S-wavelength $\lambda_{min} = V_S / f_{max} = 1.43 \text{ m}$. Therefore, the cell size should be smaller than 0.14 m in a regular mesh for the P0 order. For the P1 order, we use the same discretization for an unstructured grid, whereas, for P2 order case, we can consider a cell size about 0.57 m . We do not link the discretization of the medium to the “wavelength” of the Biot wave because it is strongly attenuated and highly dispersive in this case. We have found that efficient absorption is obtained with same values as those used

for the elastodynamic modeling, i.e., $B = 25$ and $C = 2$ with a thickness of 5 m for the PML layers we have selected.

Actually, the PML conditions indeed absorb 99 % of the wave energy. If higher absorption is required for specific applications, one could extend the PML thickness, increasing the computational cost significantly and improving the PML efficiency by one order of magnitude, as we have checked with a PML thickness of 10 m .

As the simulation is carried out in the frequency domain, the effect of PML conditions is felt at any time when we go back to the time domain by an inverse Fourier transform. We check that similar values provide efficient absorption for a propagative/diffusive intermediate Biot regime (corresponding to a cut-off frequency of $f_c = 64\text{ Hz}$ and a permeability of $k_0 = 10^{-9}\text{ m}^2$) as well as for a propagative Biot regime (corresponding to a cut-off frequency of $f_c = 0.64\text{ Hz}$ and a fluid viscosity of $\eta = 10^{-7}\text{ Pa.s}$). Of course, as the medium becomes less permeable, the field \dot{w} becomes weaker with respect to the field \dot{u} and parasite reflections from the field \dot{u} negligible when considering that only this field might introduce noises in the field \dot{w} . In our different examples, we find that this problem is not too drastic as long as we consider the above parameters for the PML absorption. Figure 2.4 shows frequency waveform maps for the \dot{u}_z component at different frequencies. Similar behaviors are obtained for other components. Putting the source near a corner increases the difficulty of this numerical test with grazing parasitic strong reflections on numerical boundaries. One can see the efficient damping of waves inside the PML layers. Performing an inverse fast Fourier transform gives us the reconstructed snapshot in the time domain (Figure 2.5), in which the efficiency of PML conditions is again illustrated.

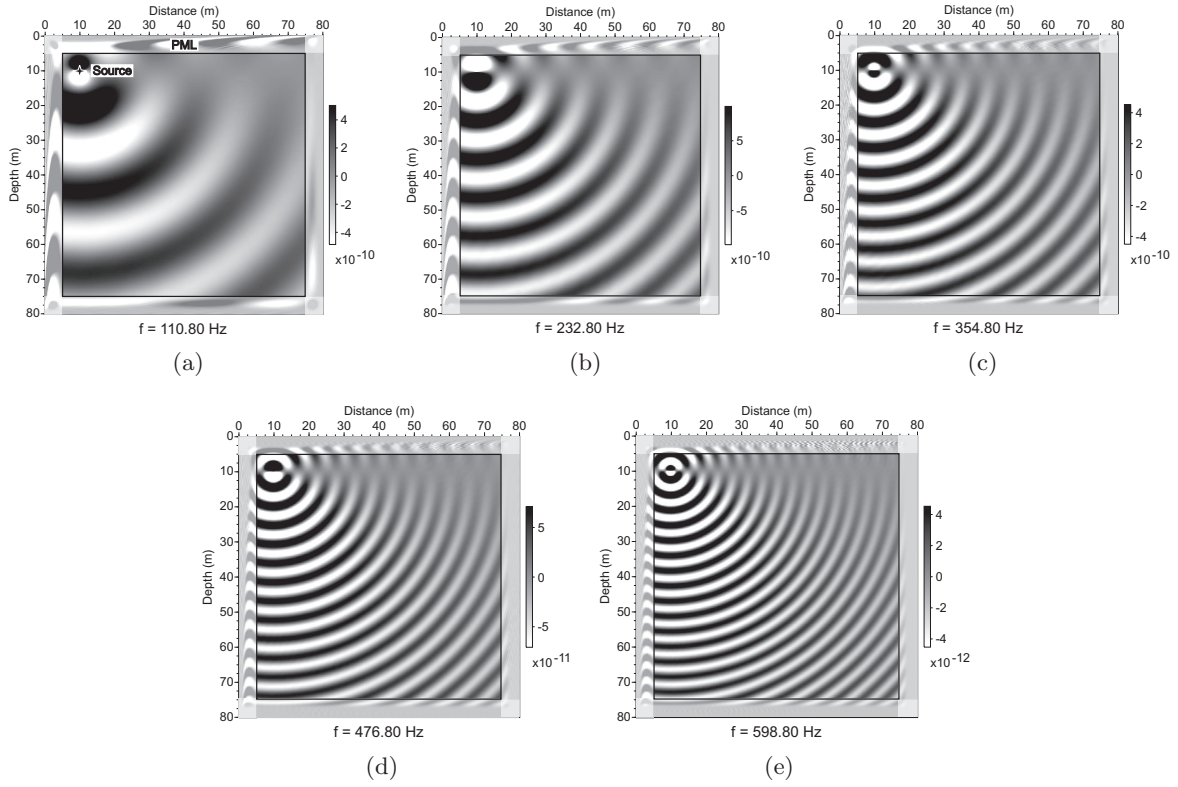


FIGURE 2.4 – Frequency (f) maps of the solid vertical particle velocity \dot{u}_z at (a) 110.80 Hz , (b) 232.80 Hz , (c) 354.80 Hz , (d) 476.80 Hz , and (e) 598.80 Hz . We recall the geometry and the source position on (a).

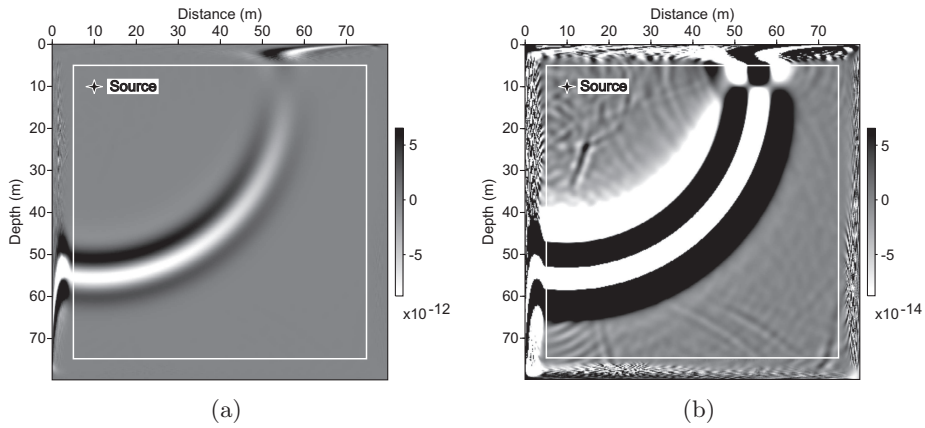


FIGURE 2.5 – Two time snapshots of solid vertical particle velocity \dot{u}_z at time 0.014 s plotted (a) with the true field amplitude and (b) with a graphical saturation of 100 to detect small parasitic numerical reflections coming from discretized PML zones.

2.1.5.3 Computational cost estimation

In Table 2.3, we compare the time and memory of LU factorization for elastic and poroelastic DGM modeling with P0, P1, and P2 orders. The fill-in increases by a factor of $104/41 \simeq 2.5$, which is the ratio of nonzero elements between the elastic and poroelastic matrices. For a standard simulation, computation times and memory are provided in Table 2.3 for the elastic and poroelastic cases. We observe a factor of 3 to 5 for time and memory resources to solve the linear system through the LU decomposition (we use the direct solver MUMPS ; Amestoy *et al.* (2000)) in coherence with the increase of the theoretical fill-in. For 2D geometries, extension toward poroelastodynamics is still manageable with available computer resources for present-day clusters, but for high-order interpolations (P1 and P2 orders), we must limit our model sizes because of memory limitations. Consequently, our simulations are performed using the P0 order. The P1 and P2 orders can be used in local areas to enhance solution precision as, for example, along irregular interfaces or in near-field source zones. Despite the different orders of magnitude in the values of the parameters and the field unknowns, single precision storage for complex numbers is found to be enough for the different simulations we present here.

Order	Poroelastic			Elastic		
	P0	P1	P2	P0	P1	P2
Number of cells	13000	16000	1000	13000	16000	1000
Number of unknowns ($\times 10^6$)	2.1	19	5.7	0.89	7.2	1.8
Time for matrix building	0.1 s	1.6 s	0.5 s	0.07 s	0.6 s	0.2 s
Time for analysis and factorization	3.6 s	43 s	23 s	1.4 s	9.4 s	2.3 s
Maximum memory for one processor	130 Mb	1290 Mb	270 Mb	70 Mb	320 Mb	120 Mb

TABLE 2.3 – Comparison of different numerical parameters for elastic and poroelastic DGM modeling for P0, P1, and P2 orders. We consider a small homogeneous medium ($15 * 15 m$), and we compute its response on 16 processors (2 nodes of 8 processors).

2.1.5.4 Source implementation

The implementation of the source depends on the interpolation order we are using. For structured grid, the central flux estimation induces a pattern whereby only velocities (and not stress components) on adjacent cells are perturbed when considering a stress increase in a given cell (the same for stresses with a velocity increase) giving a red/black pattern in the solution (the excitation of two spatially independant subgrids ; see Brossier *et al.* (2008b)). For the P0 order, this pattern is a binary one, and for higher interpolations of wanted components of fields, this pattern is strongly reduced.

For the P0 order, especially for punctual sources, we should smear numerical excitations over neighboring cells to have a correct excitation of the grid : we spread the source over a circle with a diameter equal to eight times the characteristic cell size. This area size is small compared to the distances between sources and receivers and characteristic lengths of the modeling. The amplitude of the excitation is normalized by the number of cells included in the source area for correct excitation amplitudes. For the P1 and P2 orders, we consider the punctual source inside the triangle, thanks to linear or quadratic interpolations. The excitation is estimated for each

node inside the element to produce the right impulsion at the source position. When the source is right on one of the triangle nodes, we slightly shift it to avoid interpolation singularities. In the example of the infinite medium (medium properties are defined in Table 2.1), we compare solutions obtained for the P0 and P2 sources. The medium is a square $6 * 6 \text{ m}$ with 2-m-thick PML all around the medium. An isotropic source (a Ricker function centered on 200 Hz ; we compute 49 frequencies from 1 to 600 Hz) is set at $x = 1 \text{ m}$ and $z = 1 \text{ m}$, and two receivers are set at $x = z = 2 \text{ m}$ and $x = z = 5 \text{ m}$. Figure 2.6 describes the geometry. As we record complex frequency signals at receiver positions, through an inverse fast Fourier transform, we transform them into real time signals for the different components. The seismograms of the vertical and horizontal solid velocity components (\dot{u}_z and \dot{u}_x) are plotted in Figure 2.7. The results show an excellent agreement of the P direct wave between the solutions with a P0 spreaded source and solutions with a P2 punctual source, and confirm the source implementation and the wave propagation in an infinite medium.

We might introduce both forces ($F_{\sigma_x}, F_{\sigma_z}, F_{P_x}, F_{P_z}$) and excitation stresses ($T_1^0, T_2^0, T_3^0, T_4^0$) as shown in the system 2.14. We might use various kinds of sources (vertical or horizontal forces, isotropic sources, and so on) applied on mean porous and/or fluid fields. For the homogeneous previous example that we have used for the PML investigation, Figure 2.4 shows the radiation pattern of an explosive source at different frequencies for the component \dot{u}_z .

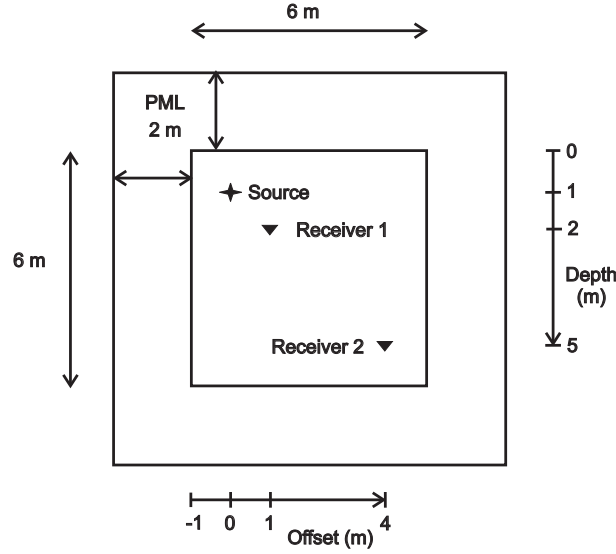


FIGURE 2.6 – Geometry of the source and the receivers for the infinite medium. Medium properties are given in Table 2.1.

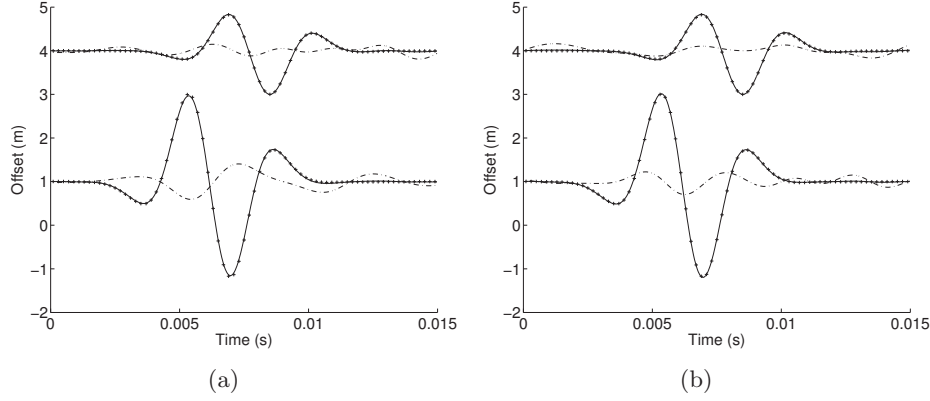


FIGURE 2.7 – Comparison between (a) \dot{u}_z and (b) \dot{u}_x components between the P2 source (continuous line) and the P0 spreaded source (crosses) for two receivers at $x = z = 2$ m and $x = z = 5$ m. Errors between these solutions are displayed through dashed-dotted lines (with an amplification factor of 10). Medium properties are given in Table 2.1.

2.1.6 Validation of different Biot regimes across a flat interface between two media

The main difference between elastic and poroelastic modeling consists in considering fluid/solid interactions. In addition to the fluid displacement, the poroelastic theory allows the propagation of the Biot slow wave. As shown in Figure 2.2, the P- and S-waves are slightly dispersive. In contrast, the Biot wave is highly dispersive with strong frequency dependence, via the flow resistance term $\tilde{\rho}$ defined in equation 2.3 as a function of the cut-off pulsation ω_c . Different values of the viscosity and the permeability are considered (see Table 2.2) to look at the different behaviors of the Biot wave. As shown in Figure 2.2, this wave is propagative above the cut-off frequency (given in Table 2.2), diffusive and strongly dispersive below, with an intermediate behavior around this frequency. For the latter, the wave behavior is very complex, as it is moving from a diffusive to a propagative regime across a narrow frequency band. To verify whether the fluid/solid interactions are correctly taken into account, we must check the accuracy of this wave for both the solid and the relative fluid/solid displacements for these three behaviors of the Biot wave.

We consider a medium of a square $40 * 40$ m, with a 5-m-deep interface separating two homogeneous areas. We add 5-m-thick PML all around the medium. The first layer is close to a purely elastic layer (low permeability and porosity; see Table 2.2) in which an explosive source is set at $x = 2$ m and $z = 2$ m. The line of receivers is 37 m deep in the second layer in which the cut-off frequency varies to get the different Biot wave behaviors (see Table 2.2). Figure 2.8 summarizes the geometric configuration.

The time seismograms obtained through an inverse fast Fourier transform from frequency solutions are compared with semi-analytic solutions obtained by the reflectivity approach of De Barros & Dietrich (2008) (see also De Barros *et al.* (2010)) based on the generalized reflectivity method (Kennett & Kerry, 1979; Bouchon, 1981) through a computer code named SKB (developed by De Barros).

Figures 2.9, 2.10, and 2.11 show the comparison between DGM and SKB solutions for both

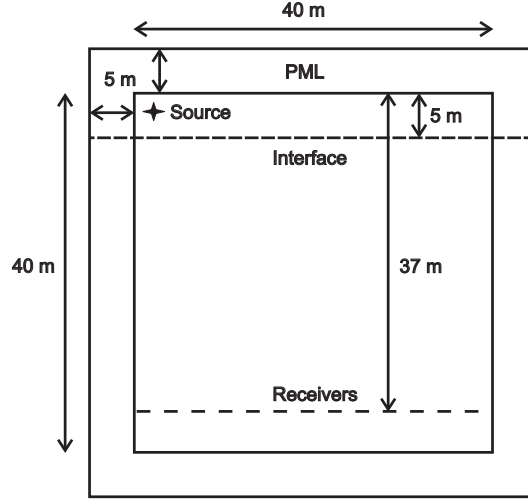


FIGURE 2.8 – Geometry of the source and the receiver line for the medium composed of two half-spaces separated by a flat interface. Medium properties are given in Table 2.2.

u_z and w_z signals and for the diffusive, propagative, and intermediate behaviors, respectively. The DGM solutions are for the P0 order in this particular case. Similarly to the Plona (1980) experiment, a P-wave is generated in the first layer and is transmitted and converted into S-waves and Biot waves at the interface; then we can observe the three propagative waves into the second layer. In the seismograms of Figures 2.9, 2.10, and 2.11, the transmitted P-wave (PP), the conical wave associated to the P direct wave in the first layer (PS1), and the transmitted S-wave (PS2) are identified. These two S-waves (PS1 and PS2) are going to be uncoupled at far offsets. In the case of the propagative Biot wave, the transmitted Biot wave (PBiot) and the conical wave phases are not uncoupled, so the two waves are difficult to separate in Figure 2.10. In the three cases, the waveform agreement between the DGM and the SKB solutions is quite good. Small errors come from the spatial discretization of the medium in the DGM as we have verified it by increasing the density of cells. These errors are at an acceptable level for many modeling purposes. This quantitative comparison with the discrete-wavenumber semi-analytic solutions shows that our implementation of the source and, consequently, the poroelastic solutions are correct for the three Biot wave regimes. Moreover, the fluid/solid interaction, as well as the energy repartition at the interface, is accurately taken into account in our approach.

As expected (see Figure 2.2), the Biot wave is clearly visible when it is propagative (Figure 2.10). Its amplitude is obviously negligible for the far-field receivers when its behavior is diffusive. When the Biot wave has an intermediate behavior (Figure 2.11), a close-up of the relative fluid/solid displacement is required to identify the Biot wave (Figure 2.12). In all cases, the relative amplitude of the Biot wave is stronger for the fluid/solid displacement than for the solid displacement. In the case of the intermediate behavior, even with an amplification of 200 for amplitude with respect to the source amplitude, the Biot wave is still nicely built (Figure 2.12). This intermediate case illustrates the numerical accuracy : we might consider this modeling to be a difficult one because we have taken the sampling criterion of 10 cells per minimum S-wavelength, although the Biot wave has a velocity lower than the S-wave at low frequency (below the cut-off frequency). Moreover, it is important to notice that the quality factors of

the S-wave are considerably reduced, leading to smaller amplitude of this wave compared to the ones in the propagative and diffusive cases.

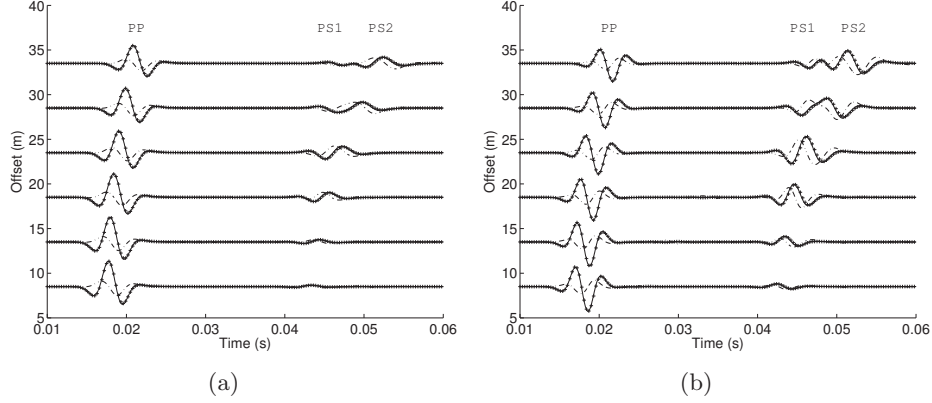


FIGURE 2.9 – Flat interface case : Seismograms of (a) vertical solid u_z , and (b) relative fluid/solid w_z , displacement components for the diffusive regime. The SKB solution is indicated by a continuous line and the DGM by crosses; dashed-dotted lines indicate differences between the two solutions (multiplied by a factor of 5). Medium properties are given in Table 2.2 (layer 1 and layer 2a). The PP and PS2 stand for the converted P and S waves, respectively, and PS1 stands for the conical wave associated to the P direct wave in the first layer. The two S-waves, PS1 and PS2, are going to be uncoupled at far offset.

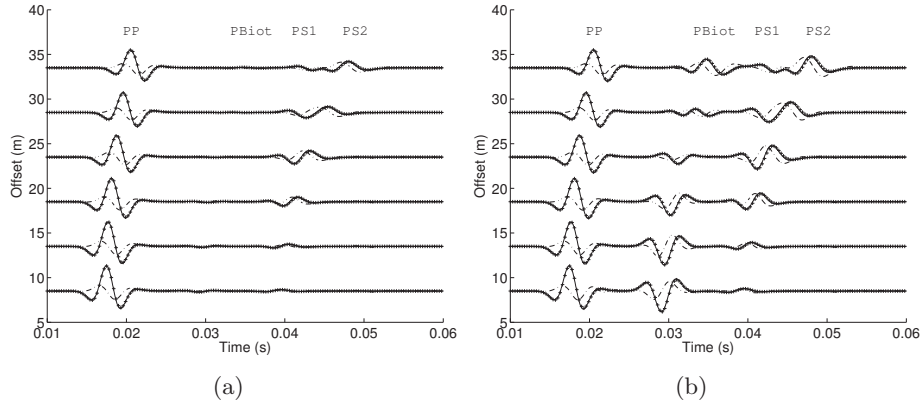


FIGURE 2.10 – Flat interface case : Seismograms of (a) vertical solid u_z , and (b) relative fluid/solid w_z , displacement components for the propagative regime. The SKB solution is indicated by a continuous line and the DGM by crosses; dashed-dotted lines indicate differences between the two solutions (multiplied by a factor of 5). Medium properties are given in Table 2.2 (layer 1 and layer 2c). The PP, PS2, and PBiot stand for the converted P, S, and Biot waves, respectively, and PS1 stands for the conical wave associated to the P direct wave in the first layer. The two S-waves, PS1 and PS2, are going to be uncoupled at far offset.

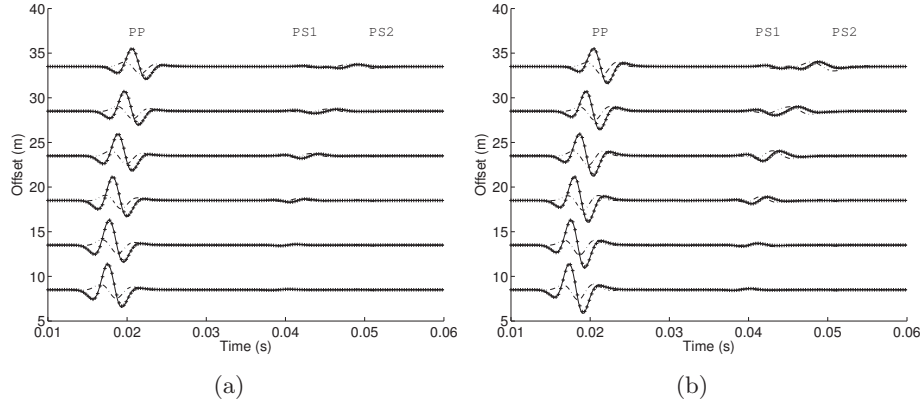


FIGURE 2.11 – Flat interface case : Seismograms of (a) vertical solid u_z , and (b) relative fluid/solid w_z , displacement components for the intermediate regime. The SKB solution is indicated by a continuous line and the DGM by crosses; dashed-dotted lines indicate differences between the two solutions (multiplied by a factor of 5). Medium properties are given in Table 2.2 (layer 1 and layer 2b). The PP and PS2 stand for the converted P and S waves, respectively, and PS1 stands for the conical wave associated to the P direct wave in the first layer. These two S-waves, PS1 and PS2, are going to be uncoupled at far offset.

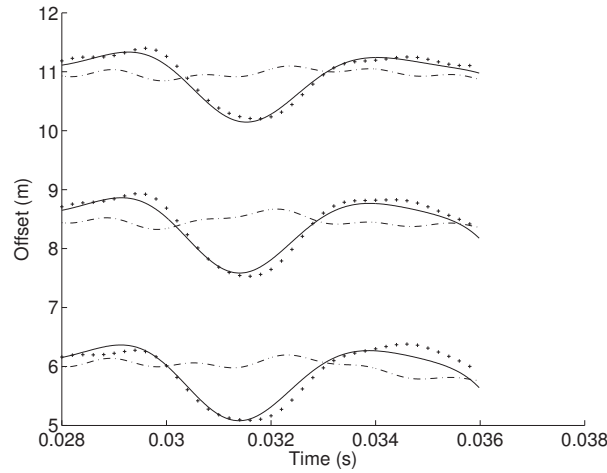


FIGURE 2.12 – A close-up of seismograms of the vertical relative fluid/solid displacement component (w_z) for the intermediate regime (see Figure 2.11). The SKB solution is indicated by a continuous line and the DGM by crosses; dashed-dotted lines indicate differences between the two solutions. In spite of the very weak amplitude of the signal, agreement between solutions is still quite good.

2.1.7 Laterally variable medium

Similarly to the field example of Dai *et al.* (1995), we consider a steam injection area in a sand reservoir consisting of eight layers. All layers are filled with water except for the sixth layer, which is saturated with oil. Steam is injected into this layer : the heat pushes outward the oil of surrounding zones, leading to two concentric areas, one saturated by steam and the outer

one by heated oil at a depth of 450 m . This complex laterally variable medium is accurately discretized with a triangular cell mesh. We consider an explosive source (a Ricker function centered at 20 Hz) at a depth of 20 m with a line of receivers at a depth of 400 m . The medium is a square 700*700 m surrounded by absorbing layers of 100 m in thickness. Figure 2.13 shows the configuration of the sand layers and the oil reservoir, and the source/receiver layout. Table 2.4 gives the medium parameters of each geologic formation. Figure 2.14 shows two snapshots of the monochromatic wavefield of the relative fluid/solid vertical particle velocity \dot{w}_z at 25 Hz for the cases with and without steam injection. Fluid motions show higher amplitude in the low cut-off frequency layers, in particular within the steam injection area. Indeed, in layers with a cut-off frequency above 100 kHz (layers 5, 6, and 8 and the heated oil area; see Table 2.4), the relative fluid/solid particle velocity is between three and four orders of magnitude lower than in the other layers.

In both cases, the time seismograms of the vertical solid particle velocity \dot{u}_z (Figure 2.15) display waves interacting with the oil-saturated zone. Despite the complexity of the signal, after the direct transmitted P-wave arrival, we see a reflection on the top of the central injected-steam area, whereas there is a smaller reflection in the case without injection. These reflected and converted waves on top of the steam injection zone are underlined on the differential seismogram between the numerical modelings with and without injection (Figure 2.15(c), displayed with an amplification factor of 2 compared to the seismograms in Figure 2.15(a) and 2.15(b)). The differential seismogram is hence the seismic response associated to the fluid substitution. Through this complex example, we illustrate the capacity of our approach for accurate modeling, which could become efficient when considering the problem of multisources, as for seismic imaging.

	Sand layers								Steam injection	Heated oil
	1	2	3	4	5	6	7	8		
K_s (GPa)	5.2	5.3	5.8	7.5	6.9	37	9.4	26	37	37
G_s (GPa)	2.4	2.9	3.3	4.2	3.6	4.4	5.6	17	4.4	4.4
ρ_s (kg/m ³)	2250	2300	2400	2490	2211	2650	2670	2700	2650	2650
K_f (GPa)	2.5	2.5	2.5	2.5	2.5	1.7	2.5	2.5	0.0014	1.2
ρ_f (kg/m ³)	1040	1040	1040	1040	1040	985	1040	1040	10	900
η (Pa.s)	0.001	0.001	0.001	0.001	0.001	150	0.001	0.001	2.2 10 ⁻⁵	0.3
m	1.5	1.5	1.5	1.5	1.5	1.5	1.5	1.5	1.5	1.5
ϕ	0.25	0.1	0.05	0.03	0.01	0.33	0.02	0.05	0.33	0.33
k_0 (m ²)	10 ⁻¹²	10 ⁻¹³	10 ⁻¹³	10 ⁻¹³	10 ⁻¹⁶	10 ⁻¹²	10 ⁻¹³	10 ⁻¹⁴	10 ⁻¹²	10 ⁻¹²
cs	20	20	20	20	20	20	20	20	20	20
f_c (kHz)	19	48	17	8	1530	4.6 10 ⁶	4.3	171	66	10 ⁴
Diffusive										
Biot wave regime										
V_P (m/s)	1505	1610	1750	2020	2180	1900	2265	3280	1430	1770
V_S (m/s)	330	550	730	940	1120	360	1140	1570	390	360
V_{Biot} (m/s)	15	8	12	17	0.9	0.06	23	6.8	6.9	1.3

TABLE 2.4 – Physical parameters of the laterally heterogeneous medium (after Dai *et al.* (1995)). The P-, S- and Biot wave velocities (V_P , V_S and V_{Biot}) are given at the central source frequency (20 Hz).

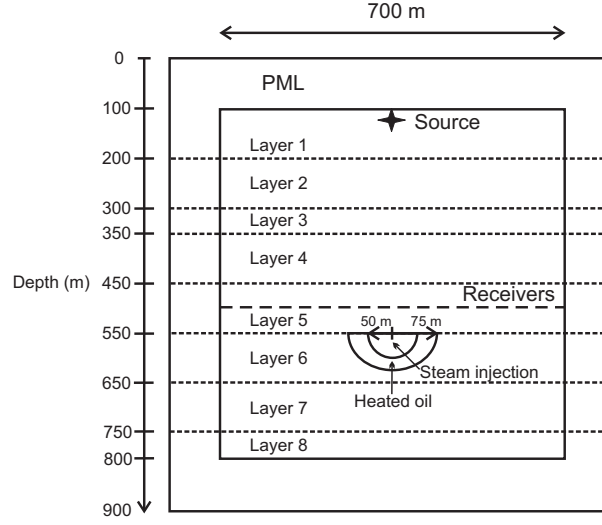


FIGURE 2.13 – Layout of the heterogeneous medium. Medium properties are given in Table 2.4. Concentric circles stand for the steam (inner circle) and heated oil extensions (after Dai *et al.* (1995)).

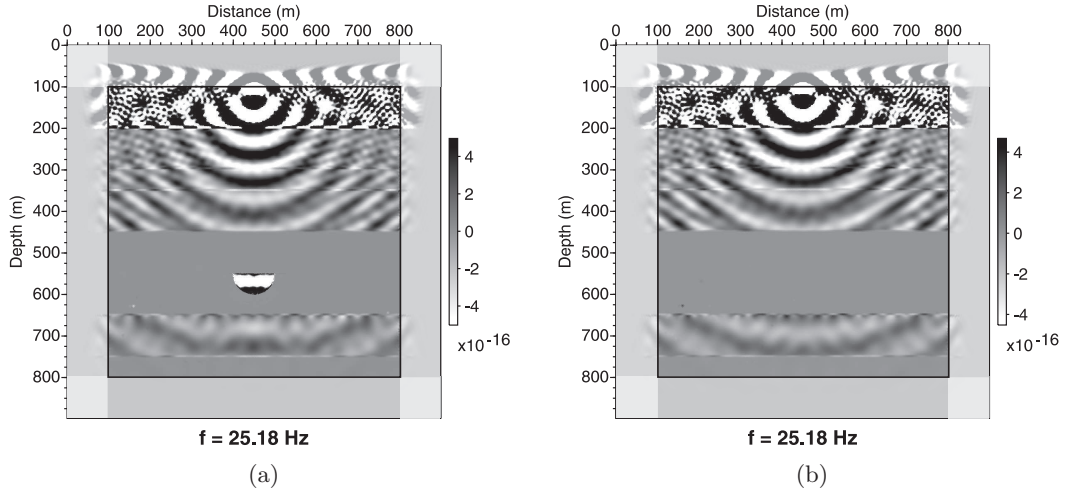
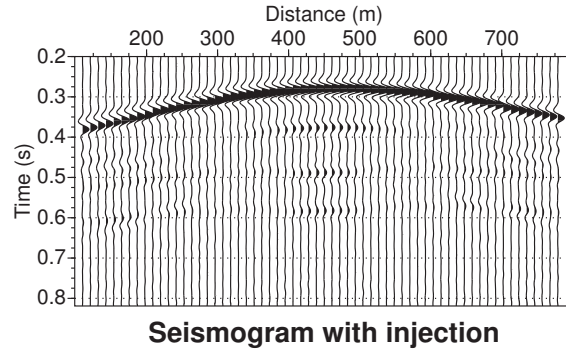
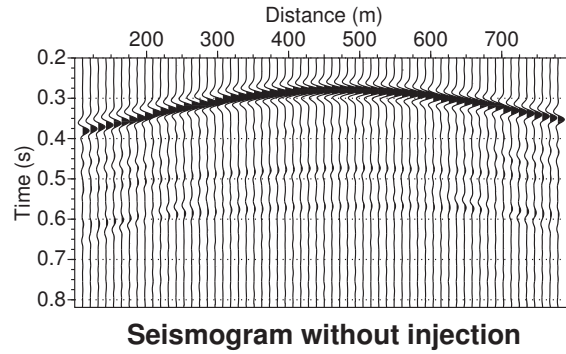


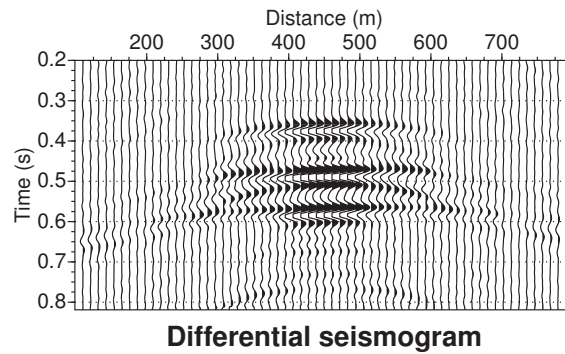
FIGURE 2.14 – Frequency maps of the relative fluid/solid vertical particle velocity w_z at a frequency (f) of 25 Hz for the cases (a) with steam injection and (b) without injection. Please note the injection area with strong amplitudes of motion.



(a)



(b)



(c)

FIGURE 2.15 – Seismograms of vertical solid particle velocity \dot{u}_z for a line of receivers at a depth of 400 m with respect to the top PML origin for the cases (a) with steam injection and (b) without injection. (c) The differential seismogram (with an amplification factor of 2). These seismograms show the incident wave as well as scattering from the injection area after steam substitution and reflections coming from the deepest interfaces. The seismogram of differences underlines the multiple reflections and conversions at the top of the injection area.

2.1.8 Conclusion

We have proposed a new numerical method to simulate wave propagation in 2D heterogeneous porous media. The homogenization of porous media leads to considering frequency-dependent parameters and wave regimes (via the flow resistance term and the Biot slow wave) to take into account diffusive phenomena linked to Biot poroelastodynamics theory. Thus, we have chosen the DGM, in the space-frequency domain, to compute wave propagation in the whole frequency band without approximation. The DGM formulation builds the fluxes of the eight poroelastodynamic fields between mesh elements. These cells are triangular and allow us to build complex interfaces and topographies and to adapt locally cell sizes and interpolation orders (hp-adaptivity). The P1 and P2 orders have been implemented, but full simulations with these high orders are still quite expensive numerically and, consequently, we expect to use these P1 and P2 orders locally to enhance solution precision around interfaces or sources. The spreaded (P0 order) and punctual (P1 and P2 orders) sources are validated with respect to the diffusive Biot wave. The PML absorbing conditions are implemented quite naturally in the frequency domain at the edges of the propagation medium.

A good agreement with reflectivity simulations in stratified media is shown for the entire frequency band and so for various Biot wave regimes. An example of a laterally variable medium is given as an illustration of the poroelastic wave modeling in a 2D heterogeneous medium. More complex descriptions of the porous medium (double porosity, patchy saturation) could be implemented by homogenization to study waveform attenuations that we might foresee for future works. Moreover, a sensibility study of porous parameters could be carried out to compute sensitivity kernels. These sensitivity kernels could then be used to perform time differential imaging by full-waveform inversion techniques. In subsurface surveys such as for landslides, and geotechnical and reservoir issues, this kind of seismic imaging is a difficult challenge to better estimate porosity, permeability, and fluid property time variations.

2.1.9 Acknowledgements

The project is supported by the National Research Agency (ANR) “Captage et Stockage de CO_2 ” program (ANR-07-PCO2-002). This work was granted access to the HPC resources of the National Computer Center for Higher Education (CINES) and the Institute for Development and Resources in Intensive Scientific Computing (IDRIS) under the allocation 2010-046091 made by Grand Équipement National de Calcul Intensif (GENCI). Louis De Barros is funded by the Department of Communications, Energy and Natural Resources (Ireland), under the National Geosciences program. The LU factorization of the impedance matrix was performed with MUMPS, available at <http://graal.ens-lyon.fr/MUMPS/index.html>. The mesh generation was performed with the help of TRIANGLE, available at <http://www.cs.cmu.edu/quake/triangle.html>. We thank C. Morency, J. D. De Basabe, and an anonymous reviewer for the pertinent and helpful review of this paper.

2.1.10 APPENDIX A : Projection matrices

Projection matrices are needed for the estimation of fluxes in equation 2.16.

$$\begin{aligned}
 N_x^1 &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} N_x^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} N_x^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\
 N_x^4 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} N_z^1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} N_z^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
 N_z^3 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} N_z^4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} M_x^1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
 M_x^2 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} M_x^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} M_x^4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
 M_x^5 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} M_z^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} M_z^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
 M_z^3 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} M_z^4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} M_z^5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

2.2 Surface libre et ondes de surface

2.2.1 Implémentation numérique

La prise en compte de la surface libre dans les modélisations poroélastiques est un problème complexe. En effet, une des hypothèses fortes de la théorie de Biot-Gassmann est que les pores sont tous connectés (la porosité occluse n'est pas considérée dans la modélisation). Le contact du milieu poreux avec un milieu fluide (air, eau) est difficile à décrire, le fluide du milieu poreux pouvant être en contact ou non avec le "fluide externe" suivant l'ouverture des pores, ce qui est naturellement très variable suivant les matériaux (sédiments, roches) et à l'échelle d'un massif (variabilité spatiale).

Classiquement, pour les modélisations élastodynamiques avec la méthode Galerkin discontinue (BenJemaa *et al.*, 2007; Brossier, 2009), pour implémenter numériquement les conditions de surface libre, on considère une cellule fantôme voisine de l'interface qui permet d'assurer la continuité des déplacements (condition de Neumann) et l'annulation des contraintes (condition de Dirichlet). On utilise cette cellule fantôme pour annuler les flux de contraintes et doubler la valeur des flux de vitesses à la surface libre. L'application explicite de ces conditions à la surface libre permet de simuler correctement les ondes réfléchies à l'interface et la création des ondes de surface (ondes de Rayleigh dans le cas P-SV 2D). Dans les milieux poroélastiques, Deresiewicz (1962) et Bourbié *et al.* (1987) ont montré que les ondes de Rayleigh correspondaient à un phénomène dispersif et dissipatif causé par les pertes d'énergie par conversions modales de l'onde de Biot. Les ondes de surface à une interface milieu poroélastique/milieu liquide proviennent de la combinaison (Edelman & Wilmanski, 2002)

- d'une onde de surface "vraie" qui a une vitesse inférieure à toutes les autres ondes,
- d'une pseudo-onde de Scholte ayant une vitesse comprise entre la vitesse de l'onde de Biot et la vitesse de l'onde S,
- et d'une pseudo-onde de Rayleigh (devenant une "vraie" onde de Rayleigh si la densité du fluide ρ_f tend vers 0).

En général, l'onde de surface "vraie" est difficilement observable (Nagy, 1992). En plus de la complexité des ondes de surface en milieu poreux, il faut déterminer si les pores au niveau de la surface sont ouverts ou fermés, et donc si les contraintes et les déplacements s'annulent ou pas. Sidler *et al.* (2010) montrent les différences de formes d'ondes des ondes de surface dans les deux cas en utilisant une approche numérique pseudo-spectrale. La théorie de Biot-Gassmann considère uniquement la porosité connectée et donc les pores ouverts en surface. Cela constitue une approximation, notamment pour la surface libre où l'arrangement de l'espace poreux est variable selon les matériaux et l'espace pour un même matériau. De plus, la complexité des champs de contraintes et de déplacements calculés dans l'approche poroélastique fait que l'on doit considérer des déplacements relatifs entre phases fluide et solide et des contraintes s'appliquant sur les phases fluide ou solide. Pour les milieux poroélastiques, il est donc difficile d'appliquer des conditions numériques explicites telles que celles utilisées dans le cas élastique.

La solution pour simuler correctement les ondes de surface a été de ne pas appliquer de conditions aux limites à la surface libre mais de considérer le milieu au dessus de la surface libre comme un fluide pur. En effet, en posant la porosité égale à 1, ce milieu est un fluide pur auquel on peut attribuer les caractéristiques de l'air ou de l'eau suivant l'application choisie.

Le coût numérique supplémentaire est faible, car même si la vitesse de propagation de l'onde P dans l'air ou dans l'eau est faible (respectivement environ 330 m/s et 1500 m/s), il n'est pas nécessaire de respecter le critère de dispersion dans ce milieu fluide pour correctement calculer les ondes de surface dans le milieu poroélastique, les coefficients de réflexion à l'interface milieu poreux/fluide étant correctement calculés.

2.2.2 Validation et exemples de simulations d'ondes de surface

Dans un premier temps, la vérification de l'implémentation de la surface libre est faite sur un cas simple en comparant les sismogrammes obtenus avec ceux obtenus par une méthode semi-analytique (code SKB, voir partie 2.1.6) où les coefficients de réflexion à la surface libre sont explicitement calculés par cette approche. Ensuite, je donne quelques exemples de l'influence de l'onde de Biot sur les ondes de surface en considérant un milieu bicouche avec les trois régimes de l'onde de Biot (diffusif, intermédiaire, propagatif) comme réalisé précédemment (partie 2.1.6).

2.2.2.1 Validation de l'implémentation de la surface libre

On considère un demi-espace (milieu homogène avec surface libre) de profondeur 35 m et de largeur 90 m . Pour modéliser la surface libre, on applique une couche d'air de 15 m d'épaisseur. Le milieu global fait 90 sur 50 m et est entouré de couches absorbantes PML de 5 m d'épaisseur. La source explosive est située à 1 m de profondeur de l'interface milieu poreux/air et à 2 m du bord PML ; la fonction source est un ricker de fréquence centrale 200 Hz et on calcule 50 fréquences entre 0 et 600 Hz . Deux lignes de récepteurs sont placés : une en surface à 3 m de l'interface milieu poreux/air et une en profondeur à 20 m de l'interface milieu poreux/air. La géométrie est résumée par la figure 2.16. Les paramètres physiques du milieu poreux sont donnés dans le tableau 2.5 et correspondent à un sable consolidé. Dans ce tableau sont également donnés les paramètres physiques de la phase fluide. L'interface milieu saturé en eau/couche d'air conserve les hypothèses de la théorie de Biot-Gassmann, les pores sont donc connectées, y compris au niveau de l'interface.

La figure 2.17 représente les cartes monochromatiques de la contrainte moyenne $T1$ et de la vitesse de déplacement solide vertical \dot{u}_z à $354,8\text{ Hz}$. On voit ainsi très bien les interférences constructives à l'interface milieu poreux/air qui aboutissent à la création des ondes de surface.

On calcule la solution temporelle en des points cartésiens de l'espace en combinant les cartes monochromatiques via une transformée de Fourier inverse et en extrayant les sismogrammes pour les deux lignes de récepteurs décrites sur la figure 2.16. Les sismogrammes ainsi obtenus sont tracés sur la figure 2.18. On met en évidence un bon accord entre la solution calculée par le code Galerkin Discontinu avec une couche d'air et la solution semi-analytique obtenue par le code SKB avec des conditions de surface libre explicites. P est l'onde de compression directe, confondue avec l'onde de compression réfléchie à la surface libre PfP (la source étant très proche de l'interface milieu poreux/air), PfS est l'onde de cisaillement issue de la conversion de l'onde P directe à la surface libre. SW est l'onde de surface (Rayleigh) créée par l'interaction des ondes P et S à la surface libre dont le caractère dispersif est bien visible sur les récepteurs situés en profondeur (récepteurs 2), les formes d'onde, et donc la vitesse de phase, variant avec l'offset. Il faut noter également que les ondes de surface ont une amplitude beaucoup plus forte que les ondes de volume, notamment à grands offsets et pour les récepteurs situés en surface.

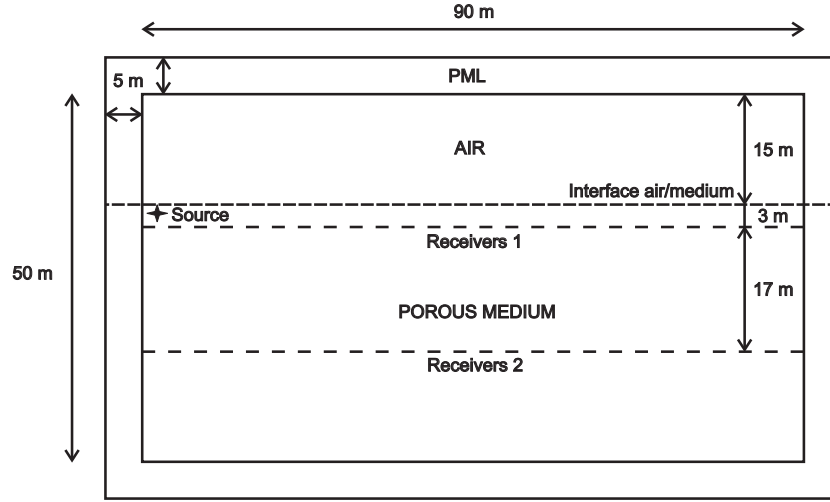


FIGURE 2.16 – Géométrie du milieu considéré pour valider l'implémentation numérique de la surface libre. Les paramètres des deux milieux (milieu poreux et air) sont donnés dans le tableau 2.5.

	Milieu poreux	Air
K_s (GPa)	50	
G_s (GPa)	30	
ρ_s (kg/m ³)	2700	
K_f (GPa)	2.2	0.0001
ρ_f (kg/m ³)	1000	1
η (Pa.s)	0.001	0.00001
m	1.5	
ϕ	0.1	1
k_0 (m ²)	10^{-14}	
cs	20	
f_c (Hz)	$5 \cdot 10^5$	
Régime de l'onde de Biot	Diffusif	
V_P (m/s)	3586	330
V_S (m/s)	1633	
V_{Biot} (m/s)	18	

TABLE 2.5 – Paramètres physiques du milieu poreux et de la couche d'air au dessus de l'interface surface libre. Les vitesses des ondes P, S et Biot (V_P , V_S et V_{Biot}) sont données à la fréquence centrale de la source (200 Hz).

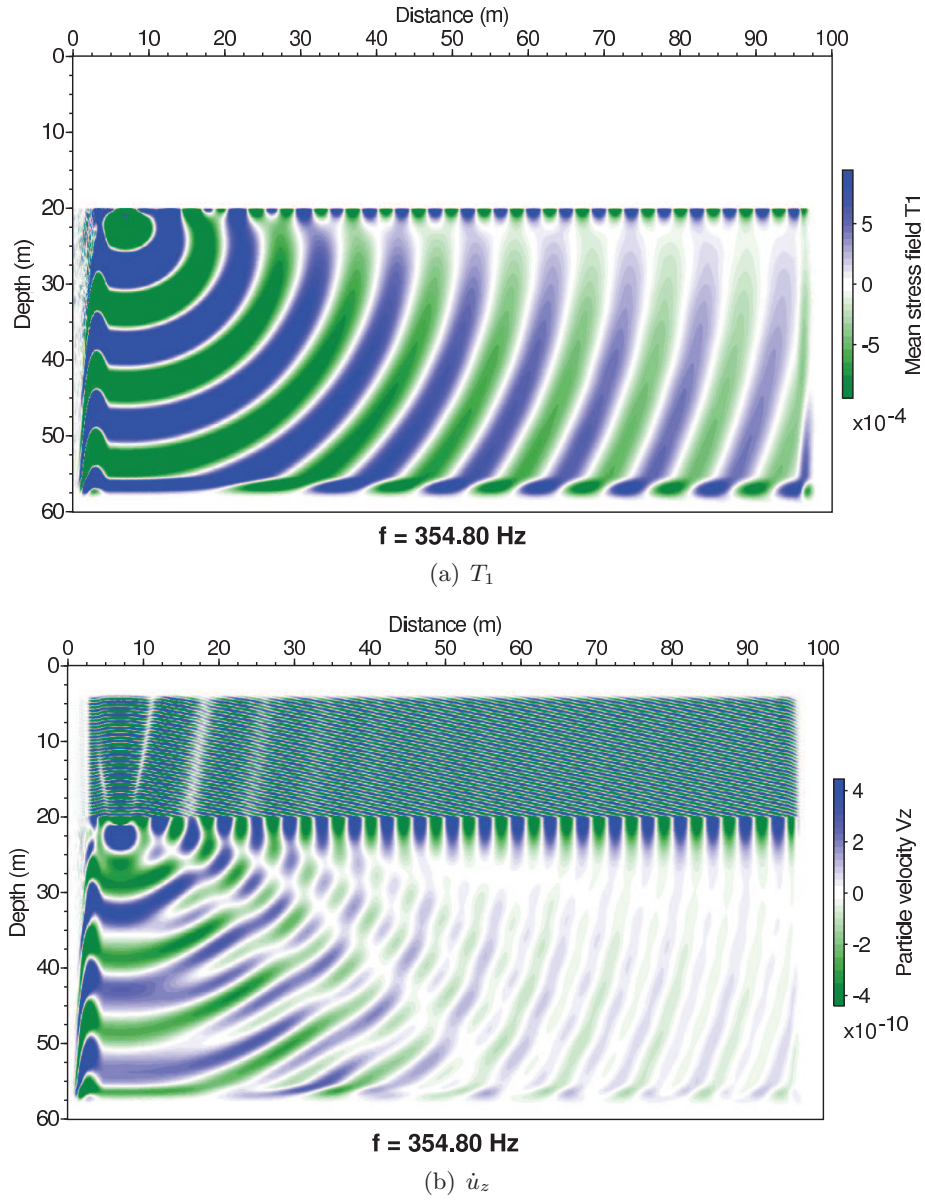


FIGURE 2.17 – Cartes monochromatiques (à $354,8 \text{ Hz}$) des champs (a) de contrainte moyenne T_1 et (b) de vitesse de déplacement solide vertical \dot{u}_z . Les paramètres des deux milieux (milieu poreux et air) sont donnés dans le tableau 2.5.

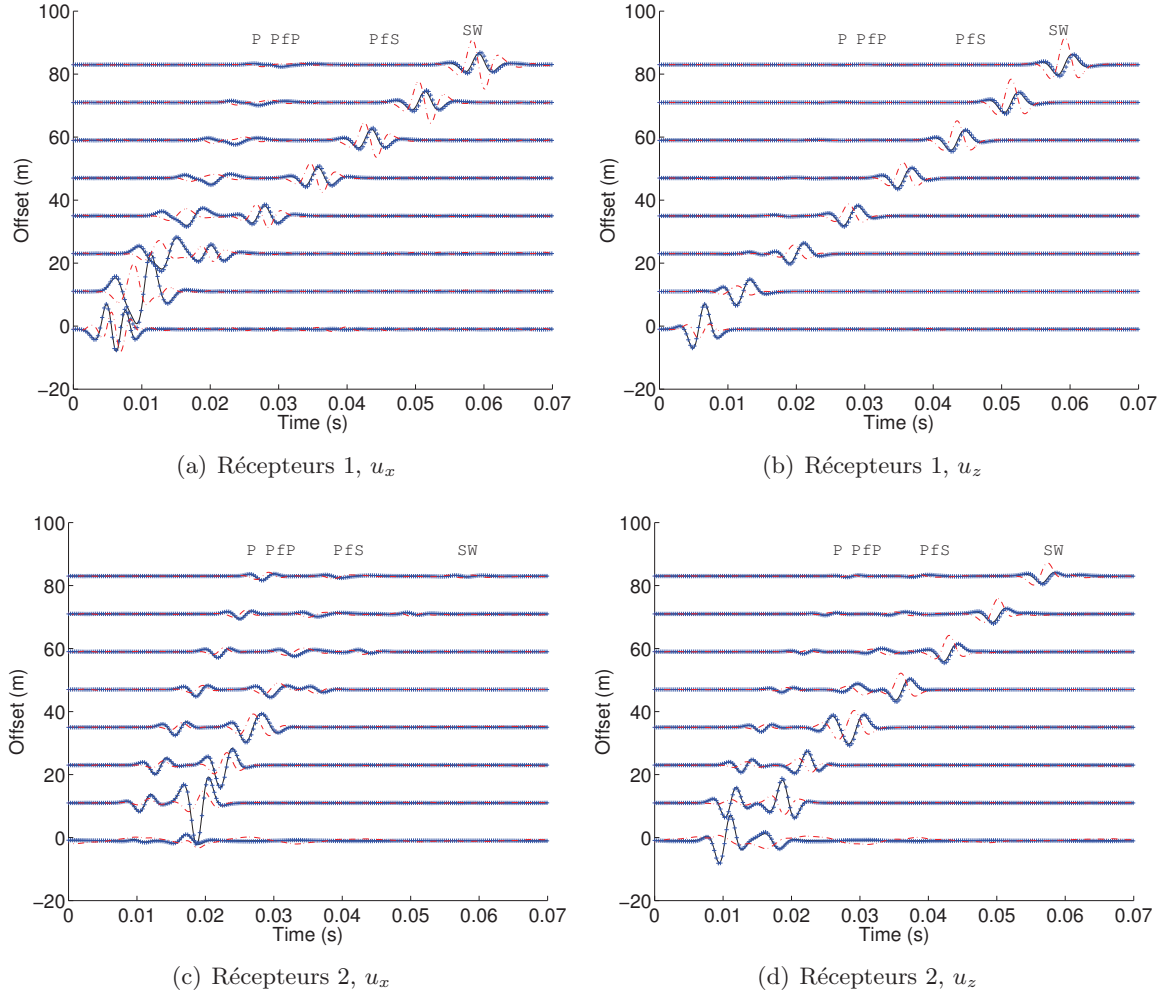


FIGURE 2.18 – Sismogrammes du champ de déplacement solide horizontal u_x (a,c) et vertical u_z (b,d) pour la ligne de récepteur 1 située à 3 m de l'interface milieu poreux/air (a,b) et pour la ligne de récepteur 2 située à 20 m de l'interface milieu poreux/air (c,d). La solution semi-analytique SKB est tracée en trait continu noir et la solution calculée par le code Galerkin Discontinuu en croix bleues. Les différences entre les deux solutions sont tracées en tiretés rouges et multipliées par 5. P est l'onde de compression directe, PfP l'onde de compression réfléchie à la surface libre, PfS est l'onde de cisaillement convertie à la surface libre et SW est l'onde de surface. Les paramètres des deux milieux (milieu poreux et air) sont donnés dans le tableau 2.5.

2.2.2.2 Influence de l'onde de Biot sur les ondes de surface

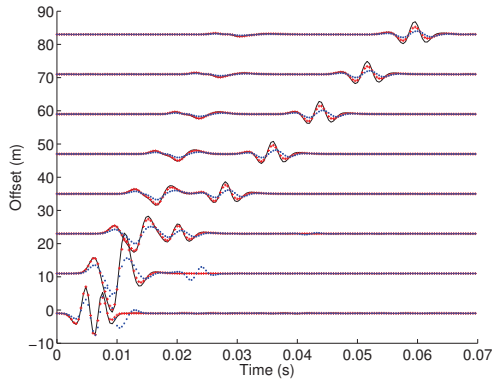
On considère le même modèle que pour la validation : configuration géométrique décrite sur la figure 2.16 et paramètres physiques donnés dans le tableau 2.5. De la même façon que ce qui est réalisé dans l'article présenté précédemment (partie 2.1.6), on fait varier les paramètres entrant dans le calcul de la fréquence de coupure f_c (équation 2.2), afin de considérer des régimes de l'onde de Biot variables : diffusif, intermédiaire et propagatif (figure 2.2). Tous les paramètres du milieu poreux étant constants par ailleurs (tableau 2.5), on fait varier la perméabilité k_0 de 3 à 5 ordres de grandeurs, soit $k_0 = 10^{-11} \text{ m}^2$ et $k_0 = 10^{-9} \text{ m}^2$. Cela revient à considérer trois modèles différents, décrits dans le tableau 2.6.

Les sismogrammes enregistrés sur les lignes de récepteurs 1 et 2 sont tracés respectivement sur les figures 2.19 et 2.20 avec des zooms traces par traces à court, moyen et grand offsets. L'onde de Biot propagative (modèle 2) est visible à court offset sur les deux lignes de récepteurs. Il est important de noter que, comme dans le cas où on considère une interface (partie 2.1.6), même si l'onde de biot n'est pas visible (régime intermédiaire ou régime propagatif à moyen et grand offset) sur les sismogrammes, elle a une forte influence sur la forme des ondes de surface, à cause de la part importante d'énergie "absorbée" par la partie diffusive de l'onde de Biot. En effet, la forme d'onde des ondes de surface est très différente quand l'onde de Biot est dans un régime diffusif (trait noir) intermédiaire (croix rouges) ou propagatif (points bleus). Ainsi, on justifie, ici encore, l'utilisation d'une théorie poroélastique complète (prenant en compte tous les phénomènes fréquentiels) pour calculer correctement la propagation des ondes dans les milieux biphasiques.

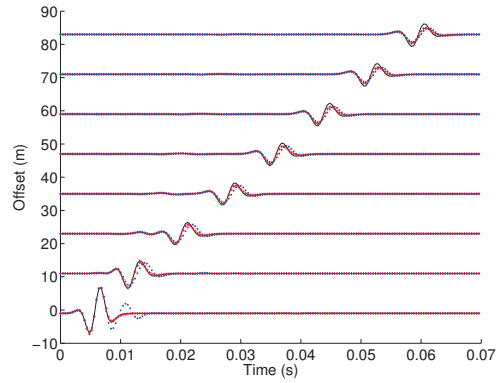
	Modèle de base	Modèle 1	Modèle 2
K_s (GPa)	50		
G_s (GPa)	30		
ρ_s (kg/m ³)	2700		
K_f (GPa)	2.2		
ρ_f (kg/m ³)	1000		
η (Pa.s)	0.001		
m	1.5		
ϕ	0.1		
k_0 (m ²)	10^{-14}	10^{-11}	10^{-9}
cs	20		
f_c (Hz)	$5 \cdot 10^5$	503	5.03
Régime de l'onde de Biot	Diffusif	Intermédiaire	Propagatif
V_P (m/s)	3586	3586	3586
V_S (m/s)	1633	1635	1643
V_{Biot} (m/s)	18	448	617

TABLE 2.6 – Paramètres physiques des trois milieux poreux correspondant à trois régimes différents de l'onde de Biot. Les vitesses des ondes P, S et Biot (V_P , V_S et V_{Biot}) sont données à la fréquence centrale de la source (200 Hz).

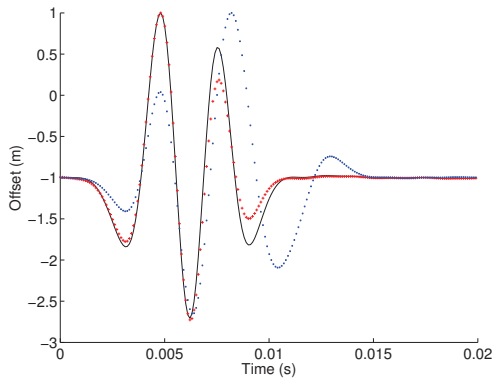
FIGURE 2.19 (*facing page*) – Sismogrammes du champ de déplacement solide horizontal u_x (a,c,e,g) et vertical u_z (b,d,f,h) pour la ligne de récepteur 1 située à 3 m de l'interface milieu poreux/air. Les figures (a) et (b) représentent les sismogrammes complets et les figures (c,d,e,f,g,h) sont des traces à court (c,d), moyen (e,f) et grand (g,h) offsets, extraites des sismogrammes pour faciliter la comparaison. La solution du modèle de base (diffusif) est tracée en trait continu noir, la solution du modèle 1 (intermédiaire) en croix rouges et la solution du modèle 2 (propagatif) en points bleus. Les paramètres des trois milieux sont donnés dans le tableau 2.6.



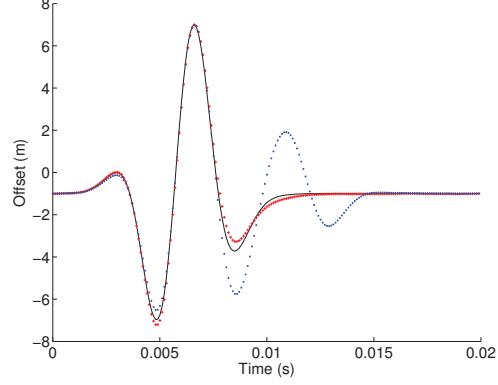
(a) u_x



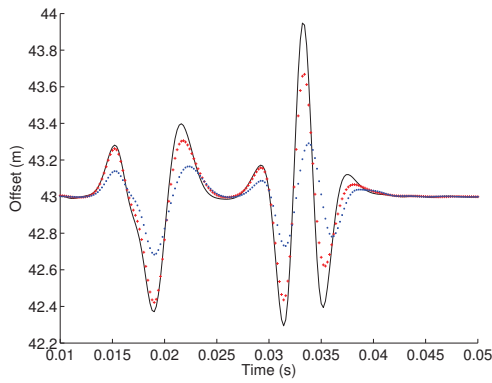
(b) u_z



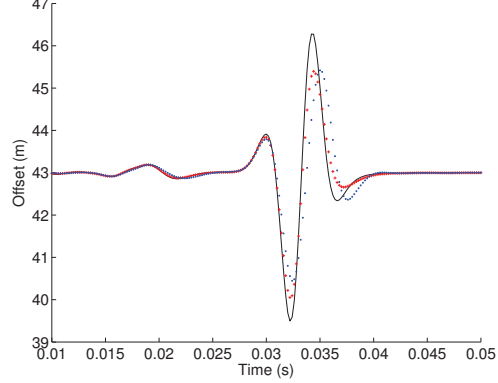
(c) u_x , Offset du récepteur = -1 m



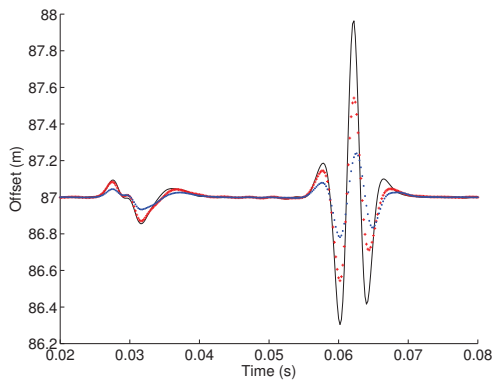
(d) u_z , Offset du récepteur = -1 m



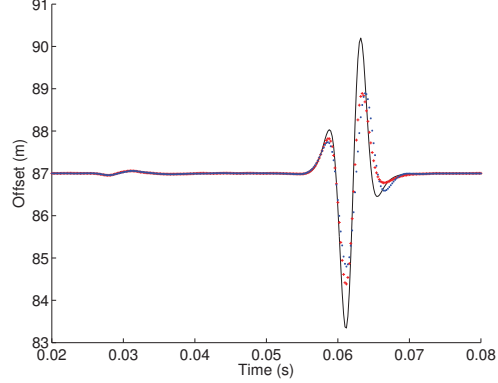
(e) u_x , Offset du récepteur = 43 m



(f) u_z , Offset du récepteur = 43 m

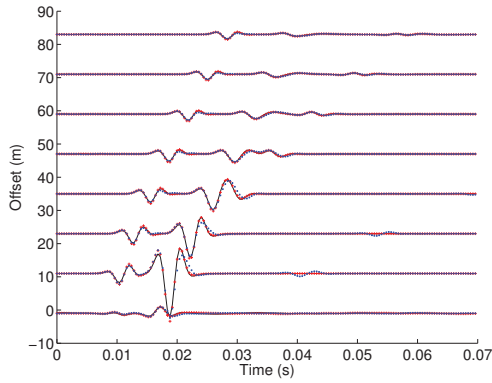


(g) u_x , Offset du récepteur = 87 m

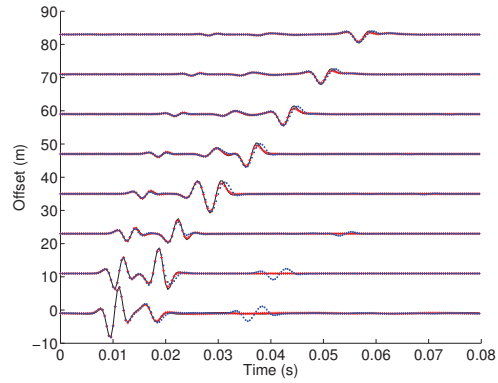


(h) u_z , Offset du récepteur = 87 m

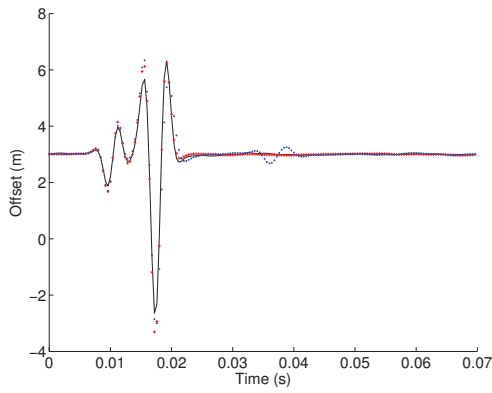
FIGURE 2.20 (*facing page*) – Sismogrammes du champ de déplacement solide horizontal u_x (a,c,e,g) et vertical u_z (b,d,f,h) pour la ligne de récepteur 2 située à 20 m de l'interface milieu poreux/air. Les figures (a) et (b) représentent les sismogrammes complets et les figures (c,d,e,f,g,h) sont des traces à court (c,d), moyen (e,f) et grand (g,h) offsets, extraites des sismogrammes pour faciliter la comparaison. La solution du modèle de base (diffusif) est tracée en trait continu noir, la solution du modèle 1 (intermédiaire) en croix rouges et la solution du modèle 2 (propagatif) en points bleus. Les paramètres des trois milieux sont donnés dans le tableau 2.6.



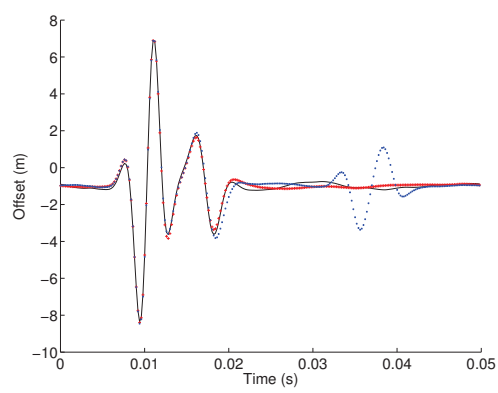
(a) u_x



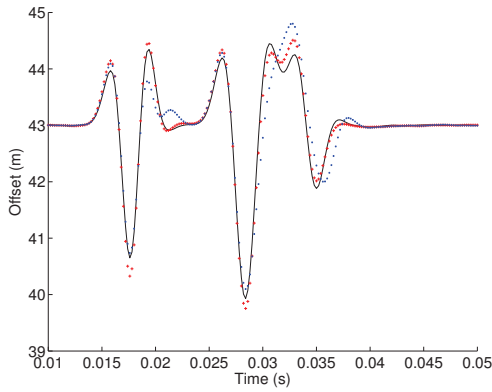
(b) u_z



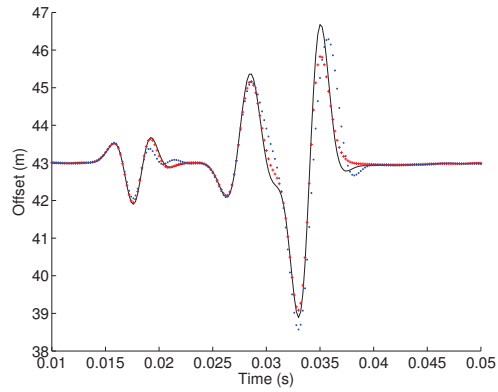
(c) u_x , Offset du récepteur = 3 m



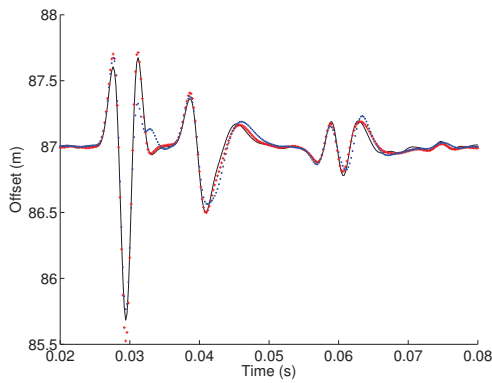
(d) u_z , Offset du récepteur = -1 m



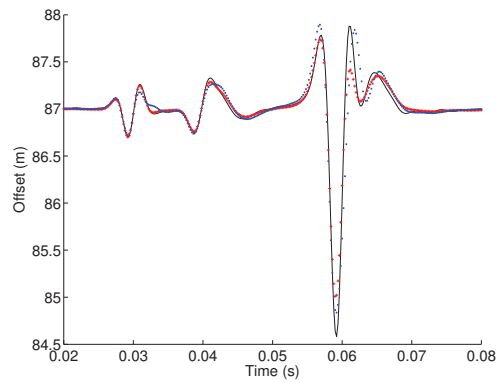
(e) u_x , Offset du récepteur = 43 m



(f) u_z , Offset du récepteur = 43 m



(g) u_x , Offset du récepteur = 87 m



(h) u_z , Offset du récepteur = 87 m

Conclusion partielle

On a décrit dans ce chapitre la méthode numérique employée pour calculer la propagation des ondes dans les milieux poroélastiques. L'article publié au journal *Geophysics* décrit les bases de la méthode et donne des exemples de validation et d'application. On montre ainsi que les ondes de volume sont sensibles à l'onde de Biot quel que soit son régime (diffusif, intermédiaire ou propagatif) et on donne un exemple de calcul de sismogrammes différentiels appliqué aux réservoirs profonds pour lesquels la prise en compte de la théorie poroélastique permet de bien décrire les phénomènes que l'on veut modéliser. Le développement de la méthode Galerkin Discontinue aux ordres d'interpolation élevés est donnée en annexe A. La validation de l'implémentation de la surface libre est également réalisée dans ce chapitre et montre la sensibilité des ondes de surface à l'onde de Biot. Toutes les simulations présentées ici ont été réalisées pour un milieu biphasique "simple" tel que celui décrit dans le chapitre 1. Dans le chapitre suivant, on va étendre les modèles d'homogénéisation à des milieux plus complexes et ceci afin d'essayer de mieux modéliser les formes d'ondes et en particulier les atténuations et les dispersions dans des milieux plus réalistes (non saturés, porosités hétérogènes...).

Chapitre 3

Ondes sismiques dans les milieux complexes multiphasiques : vitesses, atténuations et formes d'ondes

Sommaire

3.1	Atténuations mésoscopiques	90
3.2	Formalisme général de l'homogénéisation des milieux complexes .	93
3.3	Milieux à fluides multiphasiques	93
3.3.1	Modèles de saturation partielle : "patchy saturation"	93
3.3.2	Homogénéisation des phases fluides par moyennes	96
3.3.3	Influence de la saturation partielle sur les vitesses et atténuations des ondes	100
3.3.4	Influence de la saturation partielle sur les formes d'ondes	106
3.4	Milieux double porosité	109
3.4.1	Modèles double porosité	109
3.4.2	Homogénéisation par moyennes	111
3.4.3	Influence de la double porosité sur les vitesses et atténuations des ondes	111
3.4.4	Influence de la double porosité sur les formes d'ondes	118
3.5	Milieux visco-poroélastiques	122
3.5.1	Analogies visco-élastiques	122
3.5.2	Influence des modèles visco-poroélastiques sur les vitesses et atténuations des ondes	124
3.5.3	Influence des modèles visco-poroélastiques sur les formes d'ondes . . .	129
3.5.3.1	Fréquences sismiques	129
3.5.3.2	Hautes fréquences	132

Introduction

Les deux chapitres précédents ont présenté la façon de décrire les milieux poreux et de calculer la propagation des ondes sismiques dans de tels milieux. Cependant, des hypothèses simplificatrices ont été prises pour ne considérer que des milieux avec une seule phase fluide

et une seule phase poreuse. Cela ne reflète pas forcément certains milieux réels, souvent plus complexes. On a ainsi utilisé des modules mécaniques réels et indépendants de la fréquence et seul le terme inertiel $\tilde{\rho}$ (décrivant les interactions visqueuses entre phases fluide et solide) dépend de la fréquence.

Cette approximation est, la plupart du temps, correcte pour calculer les vitesses de propagation à basse fréquence (considérées alors comme des constantes réelles) mais ne reflètent pas les atténuations des ondes et les dispersions de vitesses de propagation observées dans les milieux réels. De plus, pour des cas d'expériences de laboratoire où les fréquences d'étude sont hautes (kHz ou MHz) et peuvent donc être proches de la fréquence de coupure f_c (caractérisant la transition entre régimes diffusif et propagatif de l'onde de Biot, voir chapitre 1), les vitesses prédites par la théorie de Biot-Gassmann ne sont pas correctes. De même, pour certains milieux de subsurface de perméabilités faibles, la fréquence de coupure f_c est dans la gamme des fréquences sismiques.

Pour s'approcher des atténuations et des dispersions observées dans les milieux réels, une description plus précise des milieux réels est nécessaire. La prise en compte de l'atténuation dans les milieux poreux complexes a été étudiée par de nombreux auteurs et se résume à considérer trois échelles (Pride *et al.*, 2004) :

- macroscopique = longueur d'onde : l'atténuation considérée dans la théorie de Biot-Gassmann ou dans les analogies visco-élastiques rentre dans cette catégorie car ce type d'atténuation résulte de l'homogénéisation qui revient à considérer des paramètres "généraux" complexes et dépendants de la fréquence pour décrire des atténuations observées. Cela se fait au travers du terme de résistance à l'écoulement $\tilde{\rho}$ pour Biot-Gassmann et avec des modules incluant une partie imaginaire basée sur un phénomène de relaxation équivalent pour les modèles visco-poroélastiques.
- microscopique = taille des grains : des microfissures parcourent les grains des minéraux ; au passage des ondes sismiques, les micro-variations de pression et l'écoulement des fluides dans ces microfissures provoquent le mécanisme de "squirt flow" ou "écoulement local" décrit par Mavko & Jizba (1991) et Dvorkin *et al.* (1995). Ce phénomène d'atténuation entre en jeu principalement à haute fréquence pour les milieux anisotropes.
- mésoscopique = échelle intermédiaire : c'est à cette échelle que l'atténuation dans les milieux réels aux fréquences sismiques est la plus importante. Les hétérogénéités mésoscopiques (plusieurs phases fluides ou solides à cette échelle) créent des variations de pressions et d'écoulements de fluides significatives à cette échelle.

3.1 Hétérogénéités mésoscopiques : écoulements de fluides induits et atténuations

Les hétérogénéités mésoscopiques des milieux naturels sont les principales causes de la dispersion et des atténuations observées aux fréquences sismiques (voir figure 3.1). Ce type d'atténuation correspond à un écoulement de fluide local : au passage de l'onde sismique, le gradient de pression imposé au fluide s'équilibre sur une distance mésoscopique avec des interactions entre le fluide et le solide et des phénomènes de friction dans les pores.

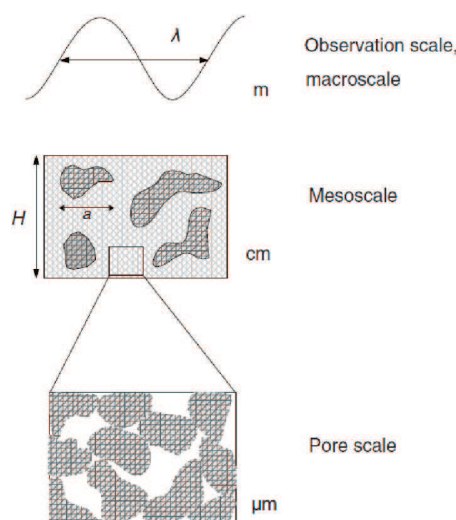


FIGURE 3.1 – Illustration des échelles d’observation : depuis l’échelle microscopique (pore) à l’échelle macroscopique (d’après Muller *et al.* (2010)). Les hétérogénéités à l’échelle intermédiaire (mésoscopiques) constituent la source des atténuations et des dispersions observées sur les données réelles.

L’atténuation à l’échelle mésoscopique est donc le phénomène prédominant pour expliquer l’atténuation observée dans les milieux réels sur une large bande de fréquences. Ce type d’atténuation a d’abord été montré sur un empilement de couches poreuses fines par Gurevich & Lopatnikov (1995) et Gelinsky & Shapiro (1997) où les multiples diffractions/conversions d’ondes aux interfaces provoquent des pertes d’énergie importantes par conversion en ondes de Biot diffusives. Cependant, dans les milieux hétérogènes, ces phénomènes se produisent plutôt sur des lentilles/patches de taille mésoscopique composées de milieux différents. Ce type de configuration s’applique bien aux milieux composés de deux phases fluides où la phase gazeuse par exemple, se répartit en patches. Cela s’applique également aux milieux fracturés (double porosité), où une phase de forte porosité et de forte perméabilité est encaissée dans un encaissant de plus faible porosité et de plus faible perméabilité.

Muller *et al.* (2010) décrivent l’ensemble des modèles proposés par divers auteurs pour modéliser ce phénomène d’écoulement mésoscopique induit. Comme c’est un mécanisme de relaxation, des valeurs limites (basses et hautes fréquences correspondant aux états "relâchés" et "contractés" du phénomène) peuvent être définies analytiquement (par exemple, par Norris (1993) pour les milieux partiellement saturés ou par Gurevich (2003) pour les milieux fracturés). Ensuite, Muller *et al.* (2010) classent les modèles en plusieurs catégories :

- les modèles basés sur la théorie de Biot-Gassmann qui considèrent un volume élémentaire représentatif sur lequel est fait l’homogénéisation.
- les modèles où sont décrits la forme des pores et des hétérogénéités. Ces modèles s’appliquent pour les petites échelles et donc plutôt à haute fréquence, c’est le cas du modèle d’écoulement local (squirt flow introduit par Mavko & Jizba (1991)).
- les modèles "analogiques" visco-élastiques et visco-poroélastiques qui décrivent des modèles équivalents avec des modules complexes dépendants de la fréquence. Ces modèles introduisent des coefficients empiriques pour mieux prendre en compte l’atténuation ob-

servées dans les milieux réels.

Dans ce chapitre, on essaie de mieux comprendre comment les attributs sismiques (vitesses et atténuations) sont dépendants de la description physique du milieu dans les formations géologiques de subsurface. On ne va donc pas s'intéresser à la deuxième catégorie de modèles qui est plus appropriée pour des applications de laboratoire.

La première catégorie de modèles, qui repose sur une description "homogénéisée" des hétérogénéités mésoscopiques, est bien appropriée pour décrire les milieux de subsurface partiellement saturés ou fracturés. Pride *et al.* (2004) ont formulé ces théories sous forme d'homogénéisations complexes permettant de se ramener à une théorie de Biot-Gassmann effective avec des modules mécaniques complexes et fréquemment dépendants. Le mécanisme de d'écoulement local ("squirt flow"), introduit par Mavko & Jizba (1991), a également été exprimé dans le formalisme d'une théorie de Biot-Gassmann effective par Pride *et al.* (2004), mais l'influence de ce modèle sur les formes d'ondes est très limitée et ne sera donc pas étudiée ici. Une description complémentaire de ces phénomènes d'atténuations mésoscopiques est donnée dans l'annexe B.

On étudiera ensuite la troisième catégorie de modèles, qui consiste à modéliser les relations de dispersion et d'atténuation directement via des modules complexes déduits d'analogies visco-élastiques. On applique cela aux milieux non consolidés (sables) où les pertes d'énergie sont principalement dues à la combinaison des phénomènes de friction entre grains qui se déplacent au passage de l'onde et d'écoulement locaux. C'est donc un mécanisme d'atténuation à l'échelle microscopique. Ce modèle a été développé par Stoll & Kan (1981) puis étendu à une théorie de Biot-Gassmann effective par Chotiros & Isakson (2004).

Dans ce chapitre, on étudie donc trois milieux complexes en comparant les modèles d'homogénéisation proposés par différents auteurs :

- milieux avec deux phases fluides : modèle de saturations partielles ("patchy saturation") et homogénéisations simples par moyennes,
- milieux avec deux phases poreuses : modèle de double porosité et homogénéisations par moyennes,
- milieux peu consolidés : modèles de friction inter-grains avec écoulement local (modèles de Stoll).

Les deux premiers cas sont traités avec le formalisme de Pride *et al.* (2004) décrit dans la partie 3.2.

L'étude de ces modèles complexes sera réalisée de deux façons. On comparera, dans un premier temps, l'influence du modèle sur les attributs sismiques macro-échelles (vitesses et atténuations) puis on analysera les différences observées sur des formes d'ondes calculées dans un milieu bicouche. La modélisation de la propagation des ondes est réalisée avec le code Galerkin discontinu (dont le principe est décrit dans le chapitre 2). La résolution du système poroélasto-dynamique étant réalisée dans le domaine fréquence-espace, on calcule la propagation des ondes sans approximation sur la rhéologie. Il est important de noter que de telles simulations n'ont jamais été réalisées sans approximation dans les milieux hétérogènes. Les précédents travaux se sont uniquement intéressés à modéliser les atténuations et dispersions dans les milieux hétérogènes par différences finies, par exemple pour Masson & Pride (2007), ou par une approche en fréquence par Rubino *et al.* (2009) qui utilisent une modélisation équivalente visco-élastique pour décrire un milieu poreux saturé.

3.2 Formalisme général de l'homogénéisation des milieux complexes

Le but est de se ramener à un milieu effectif où peut être utilisée la théorie de la poroélastodynamique de Biot-Gassmann. Ainsi, on calcule des modules mécaniques équivalents ($K_U(\omega)$, $G(\omega)$, $C(\omega)$ et $M(\omega)$) qui dépendent de la fréquence et décrivent le milieu complexe à chaque fréquence/échelle, ce qui permet d'utiliser la théorie de Biot-Gassmann décrite dans le chapitre 1 pour calculer la propagation des ondes dans ces milieux poreux. Pride *et al.* (2004) ont formulé les modules d'incompressibilité drainé $K_D(\omega)$, non drainé $K_U(\omega)$ et le module de Skempton $B(\omega)$ effectifs de la façon suivante :

$$\begin{aligned} \frac{1}{K_D(\omega)} &= a_{11} - \frac{a_{13}^2}{a_{33} - \gamma(\omega)} , \\ B(\omega) &= \frac{-a_{12}(a_{33} - \gamma(\omega)) + a_{13}(a_{23} + \gamma(\omega))}{(a_{22} - \gamma(\omega))(a_{33} - \gamma(\omega)) - (a_{23} + \gamma(\omega))^2} , \\ \frac{1}{K_U(\omega)} &= \frac{1}{K_D(\omega)} + B(\omega) \left(a_{12} - \frac{a_{13}(a_{23} + \gamma(\omega))}{a_{33} - \gamma(\omega)} \right) . \end{aligned} \quad (3.1)$$

On en déduit les modules $K_U(\omega)$, $C(\omega)$ et $M(\omega)$ entrant dans les équations de la poroélastodynamique (système 1.7), le module de cisaillement G étant indépendant de la fréquence dans les modèles étudiés.

$$\begin{aligned} K_U(\omega) &= \left[\frac{1}{K_D(\omega)} + B(\omega) \left(a_{12} - \frac{a_{13}(a_{23} + \gamma(\omega))}{a_{33} - \gamma(\omega)} \right) \right]^{-1} , \\ C(\omega) &= B(\omega) K_U(\omega) , \\ M(\omega) &= B(\omega) \frac{K_U(\omega)}{\alpha} , \end{aligned} \quad (3.2)$$

avec la constante de Biot-Willis $\alpha = 1 - K_{D_0}/K_s$ (K_{D_0} est le module d'incompressibilité drainé du milieu équivalent calculé par moyenne harmonique). Les constantes a_{ij} ($i, j \in (1, 3)$) et le coefficient de transport $\gamma(\omega)$ sont spécifiques au type de milieu étudié (fluide biphasique, double porosité). Le module de cisaillement $G(\omega)$ est considéré comme indépendant de la fréquence dans les modèles étudiés et pris égal au module de cisaillement drainé : $G(\omega) = G_D$.

3.3 Milieux à fluides multiphasiques

3.3.1 Modèles de saturation partielle : "patchy saturation"

Les milieux réels sont souvent non saturés ou constitués de deux phases fluides (air et eau, gaz et pétrole...). Les termes mécaniques (K_f), inertiels (ρ_f , $\tilde{\rho}$) et visqueux (η) pour les différents fluides peuvent varier de plusieurs ordres de grandeur (voir tableau 1.2 pour les valeurs de ces paramètres pour des fluides classiques) et donc, les interactions fluide/solide et fluide/fluide sont spécifiques et peuvent être très variables. Knight *et al.* (1998) ont montré que la répartition géométrique des phases fluides sous forme d'hétérogénéités mésoscopiques était la source d'atténuations et de dispersions des ondes sismiques. Des mesures de Cadoret (1993) sur les calcaires ou celles de Knight & Dvorkin (1992) sur des échantillons de grès montrent également la dépendance des attributs sismiques à la saturation.

En effet, si deux fluides immiscibles saturant la matrice solide, le fluide en plus faible quantité se répartit sous forme de "patches" entourés par le fluide en quantité supérieure (géométrie décrite par la figure 3.2). Au passage d'une onde de compression, à cause de leur compressibilité différente, les deux fluides sont soumis à des changements de pression différents, et donc, ont des écoulements différents lors de l'équilibration des gradients de pressions. White (1975) puis Dutta & Odé (1979) ont proposé une théorie en modélisant les zones de saturation par des sphères ("Patchy saturation theory", figure 3.2). Récemment, Vogelaar *et al.* (2010) ont développé la solution analytique exacte pour calculer le module d'incompressibilité dans un milieu contenant deux fluides sous forme "patchy".

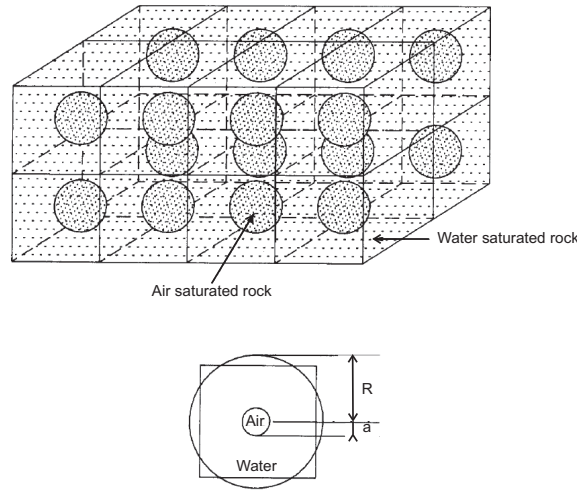


FIGURE 3.2 – Illustration du modèle de saturation partielle ("patchy saturation") où la répartition géométriques des fluides se fait sous forme de sphères de milieu poreux saturé par le fluide le plus mobile (air) enchassées dans le milieu saturé par le fluide le moins mobile (eau). On décrit ainsi ce modèle par les caractéristiques géométriques a et R , rayons des sphères. Figure modifiée d'après Dutta & Odé (1979).

A partir des équations d'état des deux fluides, Pride *et al.* (2004) décrivent les mouvements respectifs des fluides pour calculer des paramètres moyens ($K_U(\omega)$, $C(\omega)$ et $M(\omega)$) grâce aux expressions 3.2. Les constantes a_{ij} ($i, j \in (1, 3)$) sont les composantes de la matrice de rigidité généralisée et sont données par les relations :

$$\begin{aligned} a_{11} &= \frac{1}{K_{D_0}} , \\ a_{22} &= (-\beta + V_1/B_1) \frac{\alpha}{K_{D_0}} , \\ a_{33} &= (-\beta + V_2/B_2) \frac{\alpha}{K_{D_0}} , \\ a_{12} &= -\frac{V_1 \alpha}{K_{D_0}} , \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_{13} &= -\frac{V_2 \alpha}{K_{D_0}}, \\ a_{23} &= \frac{\beta \alpha}{K_{D_0}}. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Le coefficient K_{D_0} est le module drainé du squelette solide (différent du module effectif $K_D(\omega)$ défini dans l'équation 3.1); Le facteur α est la constante de Biot-Willis associée à K_{D_0} ; V_1 et V_2 sont les proportions respectives des deux fluides; B_1 et B_2 sont les modules de Skempton des deux phases fluides (qui s'expriment par les relations de Gassmann, voir équations 1.35). Pride *et al.* (2004) déterminent le paramètre β en faisant une approximation haute fréquence qui permet de considérer tous les patches comme non drainés et d'appliquer les lois de l'élasticité au composite. L'expression de β ainsi déduite est

$$\beta = \left(\frac{V_1 V_2}{B_1 B_2} \right) \frac{V_1 B_1 + V_2 B_2 - 1/\alpha + K_{D_0}/K_H}{1 - (1/\alpha - K_{D_0}/K_H)(V_1/B_1 + V_2/B_2)}, \quad (3.4)$$

où K_H est le module élastique du composite tel que

$$K_H = 1 / \left[\frac{V_1}{K_{D_0}/(1 - \alpha B_1) + 4G/3} + \frac{V_2}{K_{D_0}/(1 - \alpha B_2) + 4G/3} \right]. \quad (3.5)$$

Le calcul du coefficient de transport $\gamma(\omega)$, fonction de γ_p et ω_p est détaillé par Pride *et al.* (2004). Ce coefficient caractérise la loi de comportement des transferts entre les deux phases fluides (qui dépend des effets de capillarité et des écoulements inter-phases à l'échelle mésoscopique). L'expression obtenue est la suivante :

$$\gamma(\omega) = \gamma_p \sqrt{1 - \frac{i\omega}{\omega_p}}, \quad (3.6)$$

avec les deux termes suivants

$$\begin{aligned} \gamma_p &= \frac{V_1 k_0}{\eta_1 L_1^2}, \\ \omega_p &= \frac{K_{D_0} B_1}{\eta_1 \alpha} \frac{k_0 V_1^2 (V/S)^2}{L_1^4} \left(1 + \sqrt{\frac{\eta_2 B_2}{\eta_1 B_1}} \right)^2. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Dans ces équations apparaissent les deux termes géométriques L_1 et V/S . S est la surface de contact entre fluides dans un volume élémentaire V . L_1 est la distance dans la phase 1 (celle qui a la mobilité la plus faible, proportionnelle au rapport k_0/η) à laquelle le gradient de pression s'annule. Cette distance peut être estimée numériquement par inversion mais, si on considère que chaque patch de fluide est une sphère de rayon a , on peut utiliser des solutions analytiques pour V/S et L_1 . Pride *et al.* (2004) considèrent trois cas qui dépendent des proportions respectives de chaque phase fluide (V_1 et V_2) :

- $V_2 \ll V_1$: c'est, par exemple, le cas d'un milieu saturé en eau à 90%, la phase 2, la plus mobile, étant constituée d'air ($V_2 = 0,1$), ce qui vérifie le critère η_2/η_1 petit. Dans ce cas-là, on considère les sphères de rayon a contenant la phase 2, incluses dans des sphères de rayon R (voir figure 3.2), ce qui donne $V/S = R^3/3a^2 = aV_2/3$ et $L_1^2 = 9V_2^{-2/3}a^2(1 - 7V_2^{1/3}/6)/14$. De plus, la phase 2 étant en très petite quantité, elle peut être considérée comme immobile par rapport à la matrice solide, et permet de faire l'approximation : $\rho_f = \rho_{f1}$ (tout en gardant $\rho = (1 - \phi)\rho_s + \phi(V_1\rho_{f1} + V_2\rho_{f2})$) et $\tilde{\rho} = i\eta_1/(\omega k(\omega))$.

- $V_1 \ll V_2$: dans le cas contraire, où la phase la plus mobile est en quantité prédominante, les paramètres géométriques s'expriment : $V/S = aV_1/3$ et $L_1^2 = a^2/15$ et on considère $\rho_f = \rho_{f2}$ et $\tilde{\rho} = i\eta_2/(\omega k(\omega))$.
- si V_1 et V_2 sont du même ordre de grandeur, il n'y a pas de solution analytique pour les facteurs géométriques. C'est donc une des limitations du modèle.

Pour justifier ces considérations semi-empiriques, Pride *et al.* (2004) ont montré un excellent accord entre leurs résultats et ceux obtenus par le modèle de Johnson (2001) (voir figure 3.3).

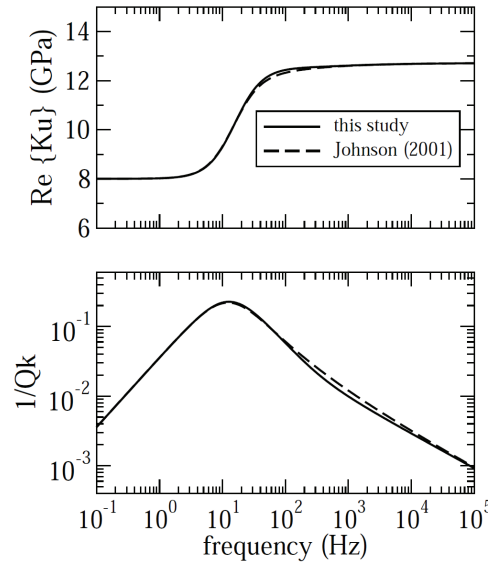


FIGURE 3.3 – Variation du module d'incompressibilité non drainé $K_U(\omega)$ en fonction de la fréquence ω pour le modèle de Pride *et al.* (2004) en trait continu (avec $a = 10$ cm) et pour le modèle de Johnson (2001) en tiretés. La figure du haut représente la partie réelle de $K_U(\omega)$ (proportionnelle aux vitesses de phase, voir équation 1.12) et la figure du bas, le rapport des parties imaginaire et réelle de $K_U(\omega)$ (proportionnelle aux facteurs de qualité : $Q_k^{-1} = -\mathcal{I}m(K_U(\omega))/\mathcal{R}e(K_U(\omega))$, voir équation 1.14). Le milieu est un grès consolidé partiellement saturé en eau avec $V_1 = 0.97$. Figure tirée de Pride *et al.* (2004).

3.3.2 Homogénéisation des phases fluides par moyennes

Une approche plus simple que celle présentée dans le paragraphe précédent consiste à calculer une phase fluide effective par des moyennes arithmétiques et harmoniques. Dans ce cas-là, on applique ensuite la théorie de Biot-Gassmann (décrite dans le chapitre 1) pour les milieux saturés par un seul fluide équivalent.

La solution la plus simple (Domenico, 1976; Berryman *et al.*, 2000) consiste à calculer les paramètres équivalents par des moyennes pondérées par la fraction volumique de la phase fluide i . Pour les modules d'incompressibilité, les moyennes arithmétiques (Voigt, 1889) et

harmoniques (Reuss, 1929) constituent les bornes respectivement basses et hautes. Pour les masses volumiques, on utilise une moyenne arithmétique. suivant les expressions

$$\begin{aligned}\rho_f &= \sum_i V_i \rho_{fi} , \\ \frac{1}{K_f} &= \sum_i \frac{V_i}{K_{fi}} .\end{aligned}\tag{3.8}$$

Hill (1952) suggère que les moyennes harmoniques et arithmétiques donnent des estimations correctes pour les modules effectifs. Généralement, la moyenne harmonique est utilisée pour calculer le module d'incompressibilité fluide équivalent. Cependant, dans le cas d'un mélange fluide air/eau, le module K_f de l'air étant très faible par rapport à celui de l'eau (de l'ordre de 10^5 Pa pour l'air et 10^9 Pa pour l'eau), pour une saturation en eau inférieure à 99.9 %, les résultats obtenus par une moyenne harmonique ne sont pas réalistes. Plusieurs auteurs ont proposé une solution à ce problème de sous-estimation de K_f , notamment Brie *et al.* (1995) qui a formulé le module d'incompressibilité fluide moyen K_f de la façon suivante

$$K_f = (K_{fi} - K_{fg}) V_l^e + K_{fg} ,\tag{3.9}$$

où l'indice l désigne la phase liquide (eau) et g la phase gazeuse (air). L'exposant e est pris égal à 5 pour se rapprocher des résultats expérimentaux utilisés par Johnson (2001) (Carcione *et al.*, 2006). La figure 3.4 illustre l'influence de la formule proposée par Brie *et al.* (1995) dans le cas d'un mélange eau/air où les modules d'incompressibilité sont différents de quatre ordres de grandeur.

Dans le cas d'un fluide biphasique, en considérant une phase liquide de viscosité η_l et une phase gazeuse de viscosité η_g et de proportion volumique V_g , Teja & Rice (1981) ont proposé une moyenne pondérée par la fraction volumique de liquide $(1 - V_g)$ pour la viscosité moyenne du fluide η

$$\eta = \eta_g \left(\frac{\eta_l}{\eta_g} \right)^{(1-V_g)} .\tag{3.10}$$

La figure 3.5 illustre l'influence de la formule proposée par Teja & Rice (1981) et réutilisée par Carcione *et al.* (2006) dans le cas d'un mélange eau/air où les viscosités sont différentes de deux ordres de grandeur.

Ce type d'homogénéisation par moyennes simples permettra de comparer les résultats obtenus ainsi avec ceux obtenus avec la théorie de saturation partielle.

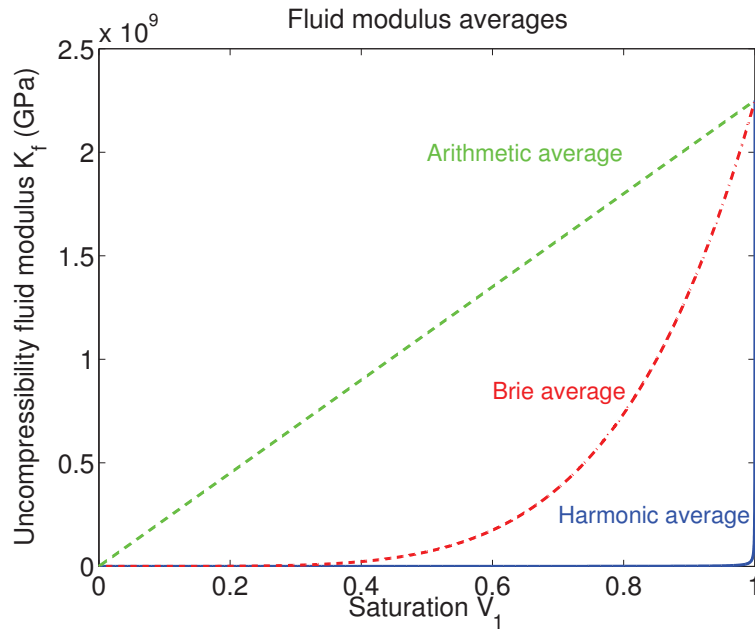


FIGURE 3.4 – Module d'incompressibilité effectif de la phase fluide K_f en fonction de la saturation en eau V_1 . La moyenne harmonique (équation 3.8) est tracée en trait bleu continu, la moyenne arithmétique en tiretés verts et la moyenne de Brie *et al.* (1995) (équation 3.9) en pointillés rouges.

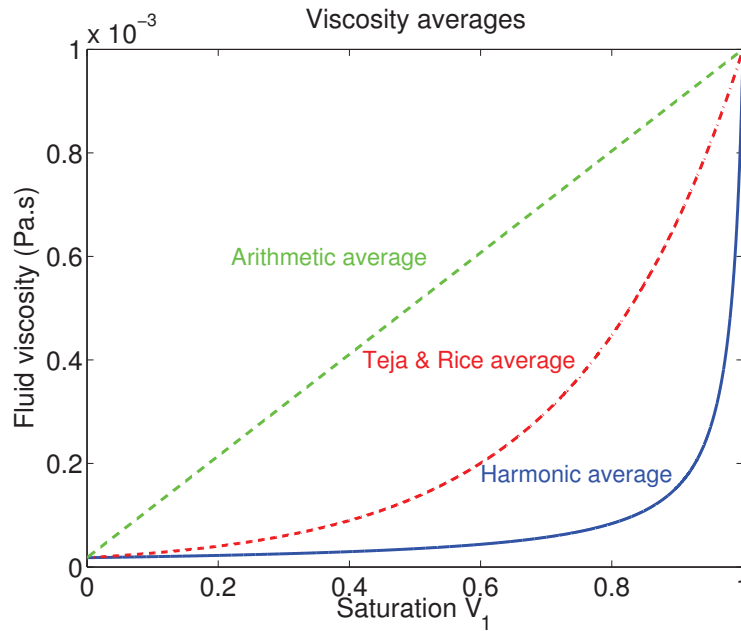


FIGURE 3.5 – Viscosité effective de la phase fluide η en fonction de la saturation en eau V_1 . La moyenne harmonique est tracée en trait bleu continu, la moyenne arithmétique en tiretés verts et la moyenne de Teja & Rice (1981) (équation 3.10) en pointillés rouges.

Cas du stockage de CO_2 :

Les masses volumiques des fluides données dans le tableau 1.2 correspondent à des valeurs à température ambiante et à pression atmosphérique. Ainsi, dans le cas particulier où l'on considère une phase fluide constituée d'eau salée et de CO_2 (cas de l'injection de CO_2 dans les aquifères salins profonds), il faut calculer les masses volumiques à la pression P_c et à la température T . Les relations empiriques tirées de Batzle & Wang (1992) et de Mavko *et al.* (2009) donnent la masse volumique de l'eau douce ρ_w et de l'eau salée ρ_b en fonction de la température et de la pression :

$$\begin{aligned}\rho_w &= 1 + 10^{-6} (-80 T - 3,3 T^2 + 0,00175 T^3 + 489 P_c - 2 T P_c + 0,016 T^2 P_c \\ &\quad - 1,3 \cdot 10^{-5} T^3 P_c - 0,333 P_c^2 - 0,002 T P_c^2) , \\ \rho_b &= \rho_w + S (0,668 + 0,44 S + 10^{-6} (300 P_c - 2400 P_c S + T (80 + 3 T - 3300 S \\ &\quad - 13 P_c + 47 P_c S))) .\end{aligned}\quad (3.11)$$

Dans ces équations, les masses volumiques ρ_w et ρ_b sont en g/cm^3 la pression P_c est en MPa , la température T est en $^\circ C$ et la salinité S est une fraction massique en $ppm/10^6$. La masse volumique du CO_2 (de même que le module d'incompressibilité et la vitesse des ondes P) en fonction de la température et de la pression est donnée dans le livre de Mavko *et al.* (2009), où sont résumées les valeurs de masse volumique obtenues par des mesures expérimentales (et des interpolations pour K_f et V_P). D'autre part, la dissolution du CO_2 dans l'eau peut être prise en compte par les formules empiriques de Hebach *et al.* (2004), en fonction de la pression de confinement et de la température. Une masse volumique critique du CO_2 est définie par $\rho_{CO_2}^c = 468 \text{ kg/m}^3$. Au dessus de cette masse volumique critique, le dioxyde de carbone est liquide ou sous forme de gaz comprimé et la masse volumique du mélange eau salée/ CO_2 peut être calculée par la formule empirique

$$\rho_f = l_0 + l_1 P_c + l_2 T + l_3 P_c^2 + l_4 T^2 . \quad (3.12)$$

Dans le cas où la masse volumique est inférieure à $\rho_{CO_2}^c$, la masse volumique du mélange eau/ CO_2 est calculée par

$$\rho_f = g_0 + g_1 P_c + g_2 T + g_3 P_c^2 + g_4 T^2 + g_5 P_c T + g_6 P_c^3 + g_7 T^2 P_c + g_8 T P_c^2 . \quad (3.13)$$

Les coefficients l_x ($x = [0, 4]$) et g_y ($y = [0, 8]$) ont été déterminés par régression à partir de mesures expérimentales menées par Hebach *et al.* (2004) et sont donnés dans le tableau 3.1.

Le module d'incompressibilité du mélange eau/ CO_2 dépend également de la pression de confinement P_c et de la température T . La loi des gaz réels de Van der Waals (1873) permet de décrire le comportement du CO_2 comme

$$(P_c + a \rho_{CO_2}^2)(1 - b \rho_{CO_2}) = \rho_{CO_2} \mathcal{R}' (T + 273) , \quad (3.14)$$

où $a = 0,359 \text{ Pa} \cdot (\text{m}^3/\text{mol})^2 = 185,43 \text{ Pa} \cdot (\text{m}^3/\text{kg})^2$ et $b = 42,7 \text{ cm}^3/\text{mol} = 0,970234 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3/\text{kg}$. \mathcal{R}' est la constante des gaz parfaits réduite par la masse molaire \mathcal{M} tel que : $\mathcal{R}' = \mathcal{R}/\mathcal{M}$ où $\mathcal{R} = 8,31 \text{ J}/(\text{mol} \cdot K)$ et la masse molaire du CO_2 est égale à $\mathcal{M} = 44 \text{ g/mol}$. A partir de cette équation, on peut calculer la compressibilité isothermale c_T par $c_T = 1/\rho_{CO_2} \cdot \partial \rho_{CO_2} / \partial P_c$

l_0 kg/m^3	l_1 $kg/(m^3.MPa)$	l_2 $kg/(m^3.K)$	l_3 $kg/(m^3.MPa^2)$	l_4 $kg/(m^3.K^2)$
949,7109	0,559684	0,883148	-0,00097	-0,00228
g_0 kg/m^3	g_1 $kg/(m^3.MPa)$	g_2 $kg/(m^3.K)$	g_3 $kg/(m^3.MPa^2)$	g_4 $kg/(m^3.K^2)$
805,1653	44,12685	1,573145	-1,45073	-0,00313
g_5 $kg/(m^3.MPa.K)$	g_6 $kg/(m^3.MPa^3)$	g_7 $kg/(m^3.MPa.K^2)$	g_8 $kg/(m^3.MPa^2.K)$	
-0,19658	0,0000627	0,000209	0,004204	

TABLE 3.1 – Coefficients et unités des fonctions de régression des équations 3.12 et 3.13.

qui est approximée à $3/4$ pour les gaz polyatomiques et donc, on peut calculer le module d'incompressibilité du CO_2 (voir Carcione *et al.* (2006)) par l'expression

$$K_{f\ CO_2} = \frac{4}{3\ c_T} = 4 \frac{\rho_{CO_2} \mathcal{R}' (T + 273) - 2\ a\ \rho_{CO_2}^2 (1 - b\ \rho_{CO_2})^2}{3 (1 - b\ \rho_{CO_2})^2}. \quad (3.15)$$

De la même façon, il convient de décrire la viscosité du CO_2 en fonction de la température (on suppose la viscosité constante en fonction de la pression). On utilise comme loi simple, la loi de Sutherland telle que

$$\eta_{CO_2} = 14,8\ 10^{-6} \frac{533}{T + 513} \left(\frac{T + 273}{293} \right)^{1,5}. \quad (3.16)$$

Ensuite par les moyennes définies précédemment (équations 3.8, 3.9 et 3.10), on calcule les paramètres de la phase fluide équivalente (combinant CO_2 et l'autre fluide).

3.3.3 Influence de la saturation partielle sur les vitesses et atténuations des ondes

Les milieux contenant deux phases fluides sont nombreux et variés : CO_2 sous forme supercritique et eau salée dans le cas d'injection de CO_2 dans des aquifères salins, mélanges de pétrole et gaz dans les réservoirs pétroliers, milieux partiellement saturés en eau en subsurface. Pour illustrer l'influence de fluides multiphasiques sur la propagation des ondes sismiques dans un milieu poreux, on considère une formation gréseuse consolidée et saturée en eau pour la couche 1 et peu consolidée et partiellement saturée en eau dans la couche 2. Les paramètres physiques des milieux considérés sont donnés dans le tableau 3.2. Dans la deuxième couche, on considère plusieurs cas où on fait varier le paramètre géométrique caractérisant le rayon des sphères dans la théorie de saturation partielle. a varie entre 1 et 10 *cm*. On étudie également l'influence de la saturation tout en restant dans l'hypothèse $V_2 \ll V_1$, c'est-à-dire qu'on considère les cas $V_1 = 0.8$, $V_1 = 0.9$ et $V_1 = 0.97$. Dans un premier temps, on étudie les différences de vitesses et d'atténuations en fonction de la fréquence dans la couche 2, partiellement saturée en eau.

Les graphiques des vitesses de propagation et des atténuations des ondes P, S et Biot en fonction de la fréquence (entre 1 et 10^8 *Hz*) sont donnés sur les figures 3.6 et 3.7. Les calculs

ont été faits selon le modèle de saturation partielle avec a variable pour $V_1 = 0.97$ (figure 3.6) et avec V_1 variable pour $a = 5 \text{ cm}$ (figure 3.7). On compare ces résultats avec ceux obtenus pour le même milieu poreux, saturé en eau, en air et en un fluide effectif (air + eau, calculé par moyennes, voir partie 3.3.2).

	Couche 1	Couche 2		
K_s (GPa)	39	35		
ρ_s (kg/m ³)		2650		
m		1		
ϕ	0.2	0.3		
k_0 (m ²)	10^{-14}	10^{-13}		
K_d (GPa)	22.3	2.637		
G_d (GPa)	44	1		
V_1	1	0.97	0.90	0.80
K_f (eau) (GPa)		2.25		
K_f (air) (GPa)		$1.51 \cdot 10^{-4}$		
K_f (effectif) (GPa)	2.25	1.93	1.33	0.737
ρ_f (eau) (kg/m ³)		1000		
ρ_f (air) (kg/m ³)		1.2		
ρ_f (effectif) (kg/m ³)	1000	970.04	900.12	800.24
η (eau) (Pa.s)		0.001		
η (air) (Pa.s)		$1.8 \cdot 10^{-5}$		
η (effectif) (Pa.s)	0.001	$8.86 \cdot 10^{-4}$	$6.69 \cdot 10^{-4}$	$4.48 \cdot 10^{-4}$
a (cm)		(1 ; 5 ; 10)		
V_P (m/s)	5978	(1831 ; 2295 ; 2296)	(1458 ; 2203 ; 2216)	(1394 ; 2065 ; 2118)
V_S (m/s)	4355	683	686	691
V_{Biot} (m/s)	16.1	(35.7 ; 27.4 ; 27.2)	(52.3 26.2 25.8)	(75.2 ; 24.5 ; 23.5)
Q_P	241957	(1.96 ; 23.2 ; 92.5)	(3.41 8.39 33)	(7.94 ; 4.42 ; 16.3)
Q_S	184620	17077	16910	16672
Q_{Biot}	0.50	(0.296 ; 0.49 ; 0.50)	(0.136 0.48 0.50)	(6.42 ; 0.50 ; 0.50)
ρ (kg/m ³)	2320	2146	2125	2095

TABLE 3.2 – Paramètres physiques utilisés pour les modèles non saturés. Les vitesses et les facteurs de qualité sont calculés à 200 Hz. Les valeurs de V_P, V_{Biot}, Q_P et Q_{Biot} sont données pour $a = (1; 5; 10) \text{ cm}$. V_S, Q_S et ρ sont indépendants de a .

La dispersion de vitesse des ondes P est très importante même à basse fréquence et varie suivant le paramètre de forme a et suivant la saturation V_1 . A basse fréquence, la vitesse des ondes P est inférieure à la vitesse obtenue pour le milieu saturé en air. De même, à haute fréquence, la vitesse obtenue dans les modèles de saturation partielle est supérieure à celle obtenue pour un milieu saturé en eau. Entre ces deux paliers, il y a une forte variation de vitesse au niveau de la fréquence de coupure. Même une faible quantité d'air crée une dispersion importante des vitesses. D'autre part, les modèles effectifs calculés par moyennes ne rendent pas du tout compte de cette forte dispersion. Enfin, le paramètre a a une forte influence sur la dispersion, la fréquence de coupure est plus haute quand a est petit (petite longueur

d'onde). L'atténuation des ondes P est proportionnelle à l'inverse du facteur de qualité ($1/Q$). L'atténuation est beaucoup plus forte pour les modèles de saturation partielle que pour les modèles effectifs calculés par moyennes. Le pic d'atténuation se situe au niveau de la fréquence de coupure, cette fréquence de coupure augmentant quand a diminue et quand V_1 diminue. Il est également intéressant de noter que l'atténuation est plus forte pour des valeurs de saturations V_1 élevées.

La vitesse et l'atténuation des ondes S sont insensibles au paramètre a . La transition de vitesse (et donc le pic d'atténuation) se situe à plus haute fréquence que pour les ondes P (autour de $10^5 - 10^6$ Hz pour les ondes S et inférieur à 100 Hz pour les ondes P) et dépend peu de la saturation. En revanche, la vitesse et l'atténuation des ondes S est plus forte quand la saturation diminue pour les modèles à saturation partielle. C'est le comportement inverse pour les modèles calculés par moyennes. Cependant, contrairement aux ondes P, les ondes S ont un comportement voisin (vitesses et atténuations du même ordre de grandeur) quel que soit le modèle utilisé, ce qui s'explique bien par la faible influence du fluide sur le module de cisaillement et donc, sur les ondes S.

Quel que soit le modèle, les ondes de Biot sont très dispersives, diffusives et donc très atténuées à basse fréquence, et propagatives au dessus de la fréquence de coupure. La vitesse est indépendante de a et varie avec la saturation de la même façon que les ondes S, en restant à proximité de la vitesse du milieu saturé en eau. L'atténuation est plus forte pour les modèles de saturation partielle à basse fréquence mais est du même ordre de grandeur que les autres modèles à plus haute fréquence.

Le fait d'utiliser le modèle de saturation partielle présenté dans la partie 3.3.1, est donc très utile pour rendre compte des dispersions de vitesses et des atténuations fortes observées dans les milieux réels. Le paragraphe suivant montre cette influence sur les formes d'ondes.

FIGURE 3.6 (*facing page*) – Vitesses (a,c,e) et atténuations ($1/Q$) (b,d,f) en fonction de la fréquence pour un milieu partiellement saturé en eau (paramètres dans le tableau 3.2) pour les ondes P (a,b), S (c,d) et Biot (e,f). La saturation est égale à $V_1 = 0,97$. On considère trois valeurs du paramètre a pour les modèles de saturation partielle (en bleu) : $a = 1$ cm en trait bleu continu, $a = 5$ cm en tiretés-pointillés bleus et $a = 10$ cm en tiretés bleus. En trait noir, sont tracés les résultats pour les milieux saturés par les phases fluides 1 (eau) et 2 (air) et en trait rouge, le milieu effectif calculé par moyennes.

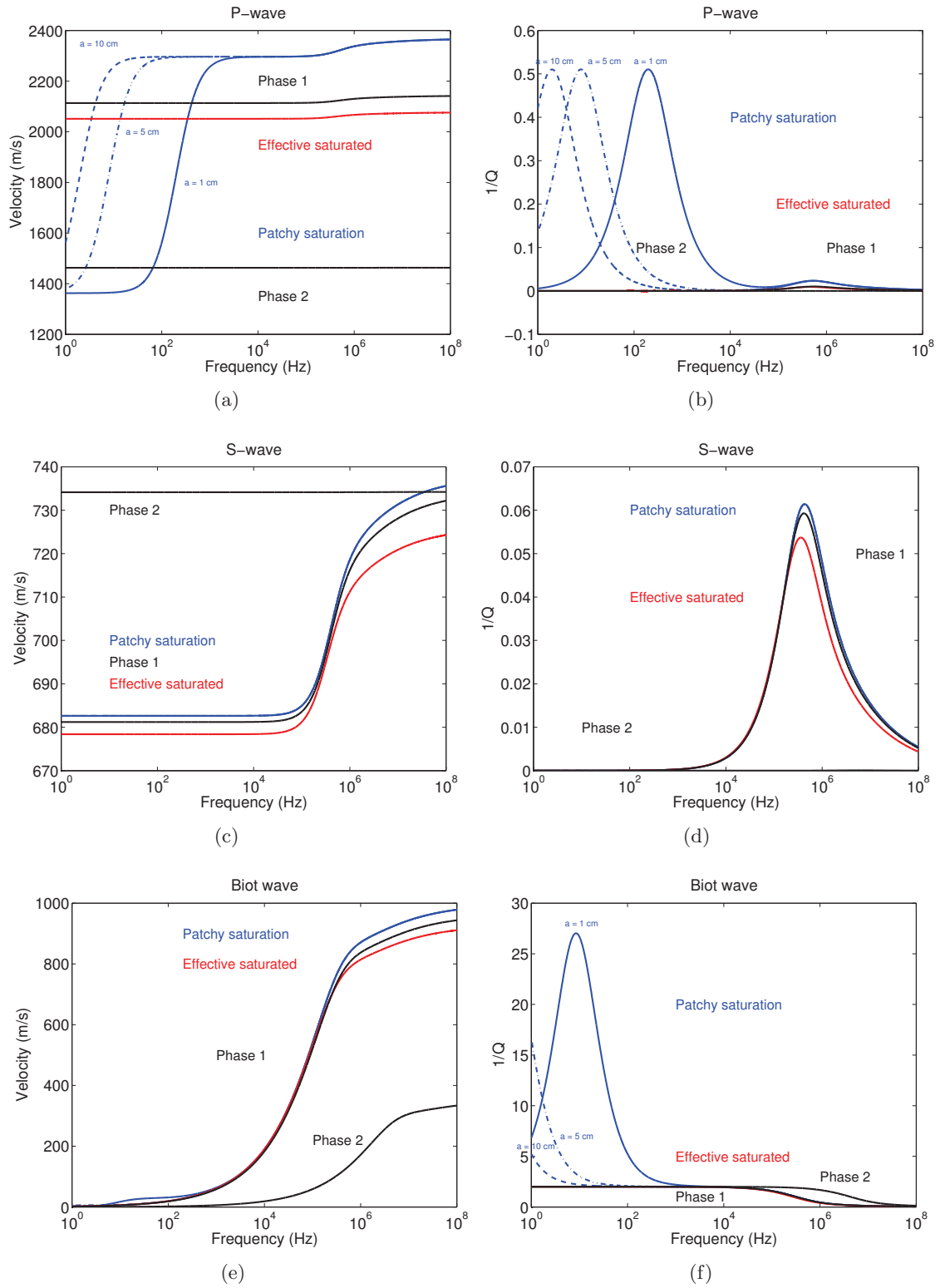
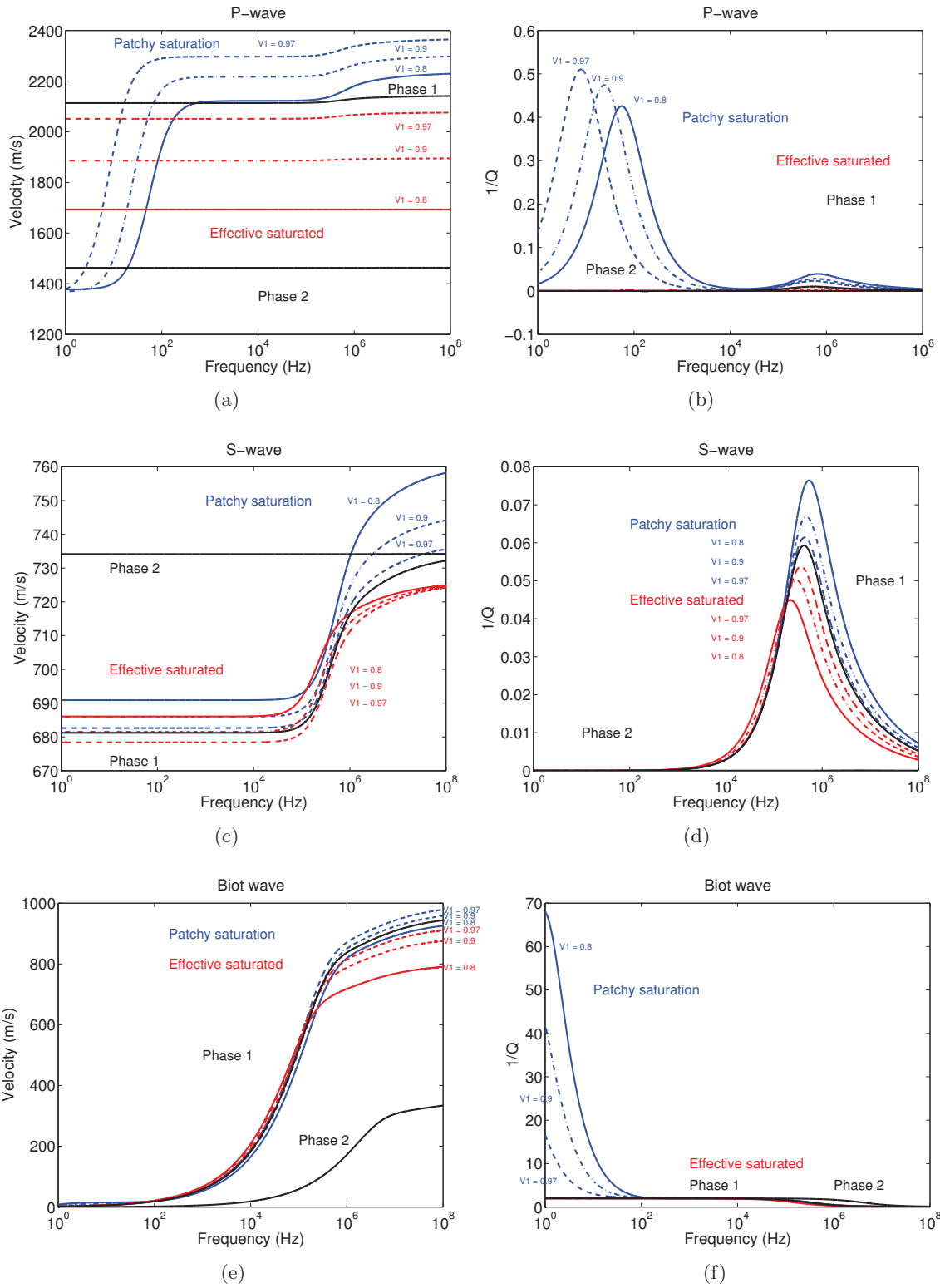


FIGURE 3.7 (*facing page*) – Vitesses (a,c,e) et atténuations ($1/Q$) (b,d,f) en fonction de la fréquence pour un milieu partiellement saturé en eau (paramètres dans le tableau 3.2) pour les ondes P (a,b), S (c,d) et Biot (e,f). Le paramètre de forme est égale à $a = 5 \text{ cm}$. On considère trois valeurs de saturation en eau V_1 pour les modèles de saturation partielle (en bleu) : $V_1 = 0,8$ en trait bleu continu, $V_1 = 0,9$ en tiretés-pointillés bleus et $V_1 = 0,97$ en tiretés bleus. En trait noir, sont tracés les résultats pour les milieux saturés par les phases fluides 1 (eau) et 2 (air) et en traits rouges, les milieux effectifs calculés par moyennes pour chaque saturation (trait continu pour $V_1 = 0,8$, tiretés-pointillés pour $V_1 = 0,9$ et tiretés pour $V_1 = 0,97$).



3.3.4 Influence de la saturation partielle sur les formes d'ondes

Après avoir démontré dans le paragraphe précédent que la présence de deux fluides dans le milieu poreux a beaucoup d'influence sur les vitesses et atténuations des ondes dans ce milieu, notamment sur la dépendance fréquentielle, on calcule la propagation des ondes et on compare les sismogrammes obtenus avec ceux calculés dans un milieu avec une seule phase fluide effective. On utilise le code Galerkin Discontinu présenté dans le chapitre 2. Comme l'implémentation du code est faite en fréquence, on peut calculer les paramètres du milieu qui dépendent de la fréquence (le terme inertiel $\tilde{\rho}(\omega)$ mais aussi les paramètres mécaniques complexes $K_U(\omega)$, $C(\omega)$ et $M(\omega)$) sans approximation. La géométrie du milieu et la position de la source et des récepteurs sont identiques au cas bicouche considéré dans le chapitre 2, partie 2.1, décrit par la figure 2.8. Les fréquences de simulations sont comprises entre 1 et 600 Hz et la source est un ricker de fréquence centrale égale à 200 Hz . Les paramètres physiques des deux couches de grès sont décrits dans le tableau 3.2.

Les sismogrammes obtenus sont présentés dans les figures 3.8 et 3.9. Seuls les signaux pour un récepteur à court offset et pour un récepteur à grand offset sont tracés. Sur la figure 3.8, sont comparés les signaux obtenus pour un modèle saturation partielle avec ceux obtenus pour un modèle effectif calculé par moyennes, pour des valeurs de saturations variables. En plus des différences d'amplitude visibles sur les ondes P et S (ceci, en relation avec l'atténuation plus grande pour les modèles saturation partielle, montrée par les figures 3.6 et 3.7), l'onde P est fortement déformée par rapport au modèle effectif. Ainsi, en plus de la vitesse de propagation et de l'amplitude, les formes d'ondes des modèles saturation partielle sont radicalement différents de ceux calculés pour des milieux effectifs, et ce, quel que soit la valeur de la saturation V_1 ou du paramètre a . Il faut noter également que le paramètre a a une influence assez faible, et uniquement sur les amplitudes des ondes P transmises (figure 3.9).

La prise en compte complète et sans approximation de tous les mécanismes physiques qui interviennent dans un milieu avec deux phases fluides est donc cruciale pour calculer correctement la propagation des ondes dans de tels milieux. La théorie de la saturation partielle décrite ici, permet d'utiliser une théorie de Biot-Gassmann généralisée pour le calcul de la propagation des ondes, mais repose tout de même sur des considérations géométriques simplificatrices (les patches sont des sphères de rayon a) qui n'ont cependant pas une forte influence sur le résultat.

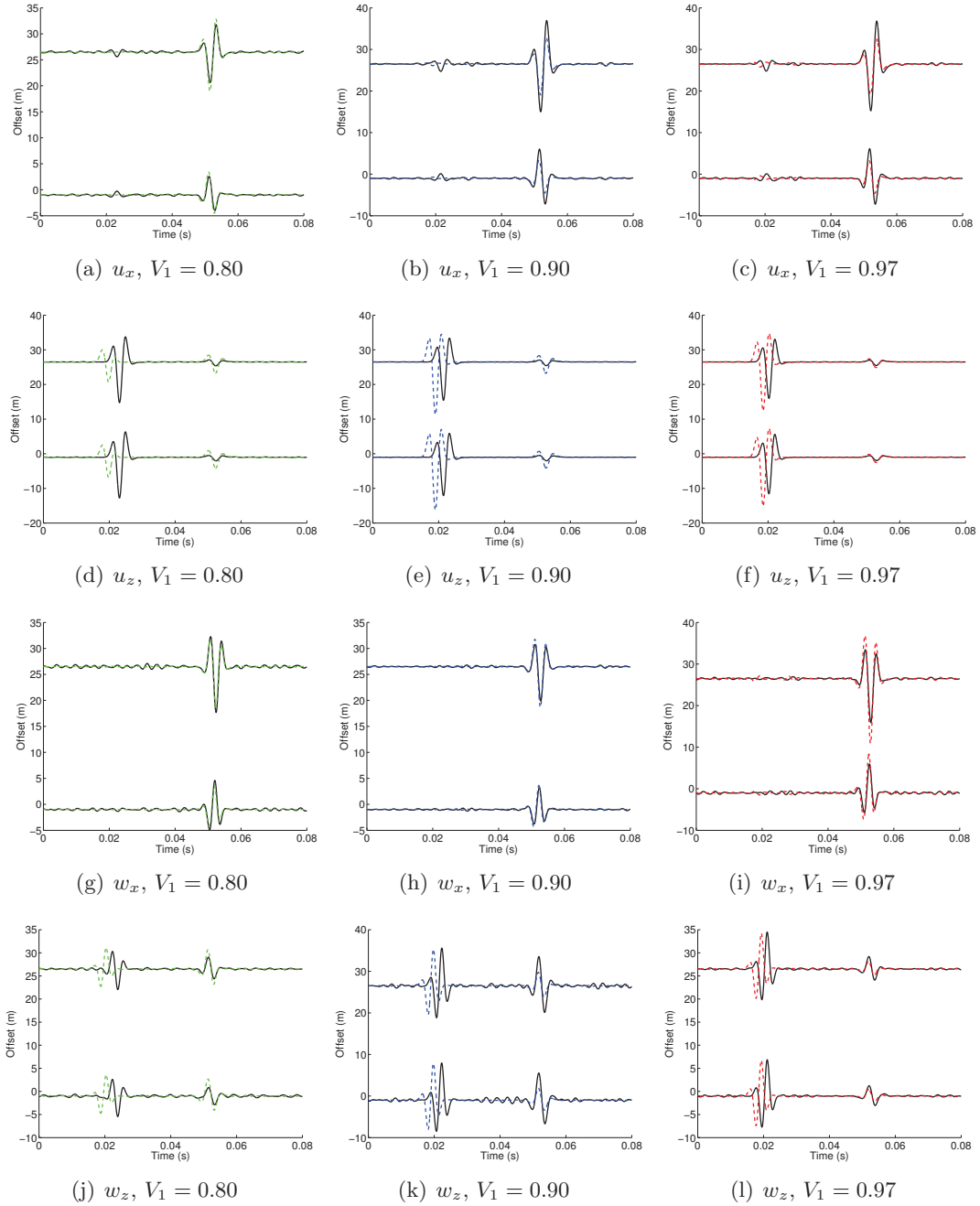


FIGURE 3.8 – Sismogrammes des déplacements solides (a à f) et relatifs fluide/solide (g à l) horizontaux (a,b,c,g,h,j) et verticaux (d,e,f,j,k,l). Le trait vert pointillé correspond au modèle saturation partielle avec une saturation égale à $V_1 = 0.80$ (a,d,g,j), le trait bleu pointillé correspond au modèle saturation partielle avec une saturation égale à $V_1 = 0.90$ (b,e,h,k) et le trait rouge pointillé correspond au modèle saturation partielle avec une saturation égale à $V_1 = 0.97$ (c,f,i,l). Les traits noirs correspondent aux milieux effectifs respectifs calculés par moyennes. Les solutions des modèles saturation partielle sont multipliées par un coefficient variable : 2 pour (b,c,k,l), 4 pour (a), 5 pour (f,g,h,i) et 10 pour (d,e,j).

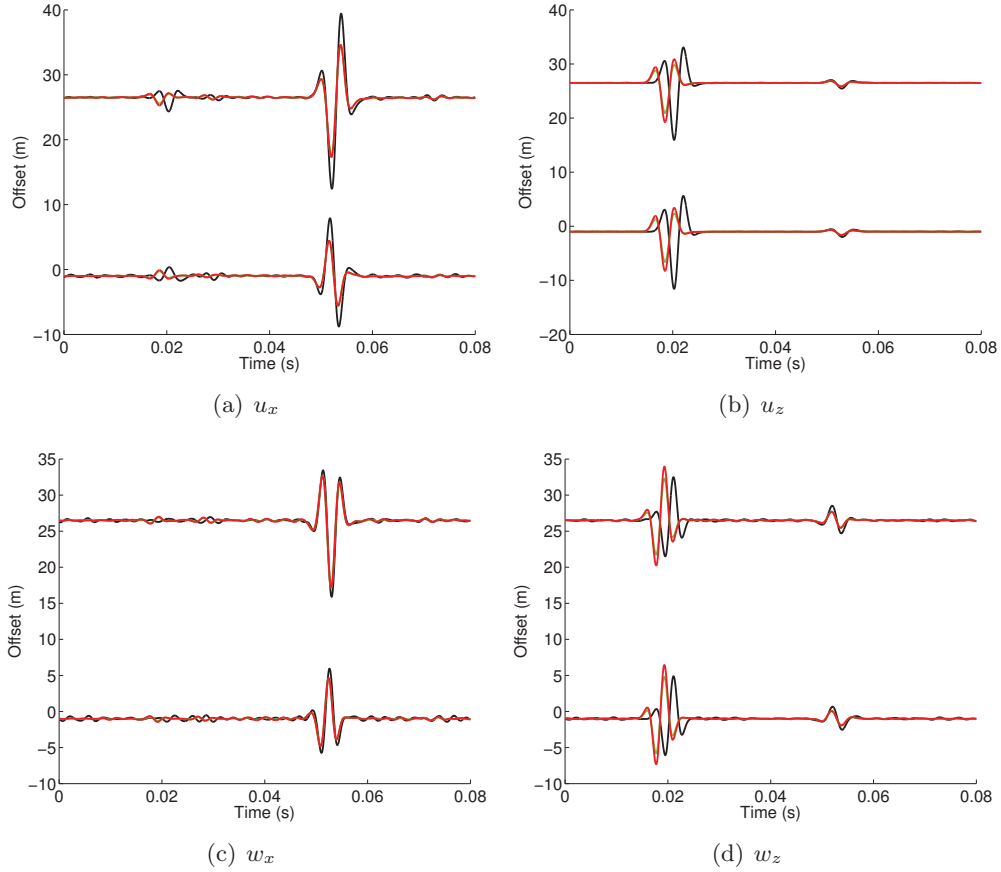


FIGURE 3.9 – Sismogrammes des déplacements solides (a,b) et relatifs fluide/solide (c,d) horizontaux (a,c) et verticaux (b,d). Le trait noir continu correspond au milieu effectif calculé par moyennes, le trait vert au modèle saturation partielle avec $a = 5$ cm et le trait rouge au modèle saturation partielle avec $a = 10$ cm. L'amplitude des signaux pour les modèles saturations partielles étant beaucoup plus faible, les signaux des simulations saturation partielle (rouges et verts) ont été multipliés par 2 (u_x , u_z et w_z) ou 3 (w_x).

3.4 Milieux double porosité

3.4.1 Modèles double porosité

Dans les théories précédentes, que ce soit pour les matériaux consolidés ou non, on a fait l'homogénéisation du milieu solide (squelette) afin de considérer directement une phase solide dans les équations de Biot. Cependant, dans le cas particulier où deux porosités de nature très différentes sont présentes, porosité minérale (intrinsèque aux grains) et porosité de fracture par exemple, il est préférable de faire l'homogénéisation avec la théorie de la double porosité (Auriault & Boutin, 1994; Royer *et al.*, 1996; Berryman & Wang, 1995, 2000; Pride & Berryman, 2003a,b; Olny & Boutin, 2003) afin de considérer des paramètres de compressibilité et de relaxation variables suivant le type de pores. En effet, la théorie de Biot considère un agencement de la matrice solide homogène et uniforme alors que les milieux réels peuvent avoir un squelette solide très hétérogène rendant la définition de paramètres moyens (notamment la porosité et la perméabilité) difficile et surtout irréaliste.

Les roches, telles que les grès par exemple, ont une porosité matricielle due à l'agencement des grains de quartz cimentés et une porosité due aux fractures qui parcourent le massif rocheux (schéma de gauche de la figure 3.10). Cela est également vrai pour les sols qui n'ont pas une répartition granulométrique homogène avec, par exemple, la présence de lentilles argileuses dans une zone de sédiments sableux (schéma de droite de la figure 3.10). La double porosité s'applique donc à l'échelle mésoscopique. La figure 3.10 donne des exemples schématisés de milieux double porosité. Comme pour le cas des milieux non saturés, Pride & Berryman (2003a) déduisent des équations d'état des deux phases poreuses, des modules mécaniques dépendants de la fréquence pour aboutir à une théorie de Biot-Gassmann généralisée (équations 3.2 de la partie 3.2).

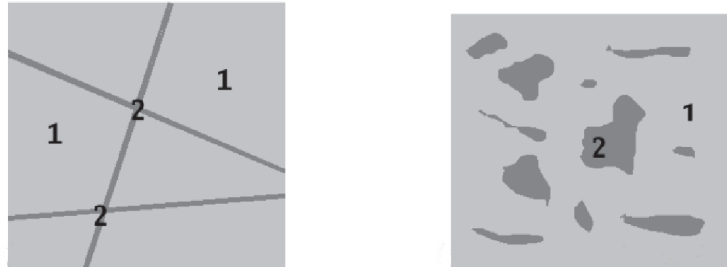


FIGURE 3.10 – Schématisation de milieux double porosité : à gauche, la phase 1 a une porosité de pores et la phase 2 une porosité de fractures. À droite, des inclusions (phase 2) sont enchassées dans une matrice de porosité différente (phase 1) (d'après De Barros (2007)).

Les constantes a_{ij} ($i \in (1, 3)$ et $j \in (1, 3)$) introduites dans les équations 3.2, s'expriment avec les expressions suivantes :

$$\begin{aligned} a_{11} &= \frac{1}{K_{D_0}}, \\ a_{22} &= \frac{V_1 \alpha_1}{K_{D_1}} \left(\frac{1}{B_1} - \frac{\alpha_1 (1 - q_1)}{1 - K_{D_1}/K_{D_2}} \right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 a_{33} &= \frac{V_2 \alpha_2}{K_{D_2}} \left(\frac{1}{B_2} - \frac{\alpha_2 (1 - q_2)}{1 - K_{D_2}/K_{D_1}} \right), \\
 a_{12} &= -\frac{V_1 q_1 \alpha_1}{K_{D_1}}, \\
 a_{13} &= -\frac{V_2 q_2 \alpha_2}{K_{D_2}}, \\
 a_{23} &= -\frac{\alpha_1 \alpha_2 K_{D_1}/K_{D_2}}{(1 - K_{D_1}/K_{D_2})^2} \left(\frac{1}{K_{D_0}} - \frac{V_1}{K_{D_1}} - \frac{V_2}{K_{D_2}} \right), \tag{3.17}
 \end{aligned}$$

avec

$$V_1 q_1 = \frac{1 - K_{D_2}/K_{D_0}}{1 - K_{D_2}/K_{D_1}} \quad V_2 q_2 = \frac{1 - K_{D_1}/K_{D_0}}{1 - K_{D_1}/K_{D_2}}. \tag{3.18}$$

Les paramètres K_{D_i} , B_i et α_i sont respectivement le module d'incompressibilité drainé, le module de Skempton et la constante de Biot-Willis de la phase i ($i = (1; 2)$). K_{D_0} est pris égal au module effectif calculé par moyenne harmonique tel que :

$$\frac{1}{K_{D_0}} = \frac{V_1}{K_{D_1}} + \frac{V_2}{K_{D_2}}. \tag{3.19}$$

Le coefficient de transport interne est donné par les relations suivantes (Pride & Berryman, 2003b)

$$\begin{aligned}
 \gamma(\omega) &= \gamma_m \sqrt{1 - \frac{i\omega}{\omega_m}}, \\
 \gamma_m &= \frac{V_1 k_1}{\eta L_1^2}, \\
 \omega_m &= \frac{K_{D_1} B_1 k_1 V_1^2 (V/S)^2}{\eta \alpha_1 L_1^4} \left(1 + \sqrt{\frac{k_1 B_2 K_{D_2} \alpha_1}{k_2 B_1 K_{D_1} \alpha_2}} \right)^2. \tag{3.20}
 \end{aligned}$$

Comme pour la théorie de la saturation partielle présentée précédemment, des paramètres géométriques doivent être définis pour caractériser la forme des inclusions de la phase 2 (la plus perméable et la plus poreuse) dans la phase 1. Pour avoir des solutions analytiques simples, Pride *et al.* (2004) considèrent la phase 2 comme des sphères de rayon a incluses dans le milieu composite de rayon R . Il en déduit l'expression de la longueur L_1 et du rapport V/S tel que

$$\begin{aligned}
 \frac{V}{S} &= \frac{R^3}{3a^2} = \frac{aV_2}{3}, \\
 L_1^2 &= \frac{9}{14} R^2 \left(1 - \frac{7a}{6R} \right). \tag{3.21}
 \end{aligned}$$

Dans le cas où une phase est totalement incluse dans l'autre, la perméabilité dynamique du milieu composite $k(\omega)$ peut être approximée par la moyenne harmonique des perméabilités dynamiques de chaque phase (Pride & Berryman, 2003a), soit

$$\frac{1}{k(\omega)} = \frac{V_1}{k_1(\omega)} + \frac{V_2}{k_2(\omega)}. \tag{3.22}$$

3.4.2 Homogénéisation par moyennes

De la même façon que pour les milieux à phase fluide multiphasique, on peut faire une homogénéisation des deux phases solides par moyennes, ce qui revient à considérer un milieu effectif simple porosité, pour lequel la théorie de Biot-Gassmann telle que décrite dans le chapitre 1 s'applique.

Les relations les plus simples consistent à établir les limites basse et haute des fonctions reliant les modules effectifs d'incompressibilité et de cisaillement aux fractions volumiques de chaque phase. Ainsi, les lois de Reuss (1929) (moyenne harmonique, limite basse) et Voigt (1889) (moyenne arithmétique, limite haute) donnent l'intervalle de valeurs de K_D et G en fonction de la proportion des constituants solides. Ce concept de limites pour l' "homogénéisation" élastique a été étendu aux matériaux biphasiques élastiques isotropes par Hashin & Shtrikman (1963), ce qui fournit ainsi les valeurs limites des modules d'incompressibilité et de cisaillement en fonction de chaque phase d'un milieu biphasique (Berryman (1995) a également formulé les limites de Hashin-Shtrickman pour les milieux multiphasiques). On utilise ici des moyennes harmoniques pour les modules drainés (K_D et G_D) et les perméabilités k_0 et une moyenne arithmétique pour les porosités données par

$$\begin{aligned}\phi &= V_1\phi_1 + V_2\phi_2, \\ \frac{1}{K_D} &= \frac{V_1}{K_{D1}} + \frac{V_2}{K_{D2}}, \\ \frac{1}{G_D} &= \frac{V_1}{K_{G1}} + \frac{V_2}{G_{D2}}, \\ \frac{1}{k_0} &= \frac{V_1}{k_{01}} + \frac{V_2}{k_{02}}.\end{aligned}\tag{3.23}$$

3.4.3 Influence de la double porosité sur les vitesses et atténuations des ondes

Pour illustrer l'utilisation des modèles double porosité, on considère une formation gréseuse de perméabilité et de porosité faibles contenant des lentilles de grès déconsolidé (sables) sous forme de patches de perméabilité et de porosité fortes. Les paramètres physiques sont donnés dans le tableau 3.3.

On calcule les valeurs de vitesses et d'atténuations des ondes P, S et Biot en fonction de la fréquence pour des modèles double porosité avec a variable et la proportion de phase 1 (V_1) variable. On compare les résultats obtenus avec les résultats pour des modèles effectifs de simple porosité et pour des modèles contenant une seule phase poreuse. On résume ces calculs sur les figures 3.11 ($V_1 = 0.97$, a variable) et 3.12 ($a = 5$ cm, V_1 variable).

Concernant les vitesses, l'onde P est plus dispersive dans les milieux double porosité que les cas équivalents simple porosité. La vitesse des ondes P des milieux composites est toujours comprise entre la vitesse dans la phase 2 et la vitesse dans la phase 1. On retrouve les deux transitions de vitesses associées aux fréquences de relaxation de chaque phase (transition régime diffusif/régime propagatif de l'onde de Biot). Les ondes P sont un peu plus dispersives quand on augmente la valeur de V_1 . Le paramètre a a une forte influence sur la fréquence de transition et donc sur le comportement basse fréquence, la fréquence de relaxation diminuant quand la taille des hétérogénéités a augmente. Les ondes S sont insensibles à l'homogénéisation double

porosité, ce qui s'explique très bien par le fait qu'on calcule les modules de cisaillement du milieu double porosité et du milieu simple porosité de la même façon (moyenne harmonique). Les ondes de Biot sont dispersives mais avec un comportement similaire à celui de la phase 1 et au milieu simple porosité.

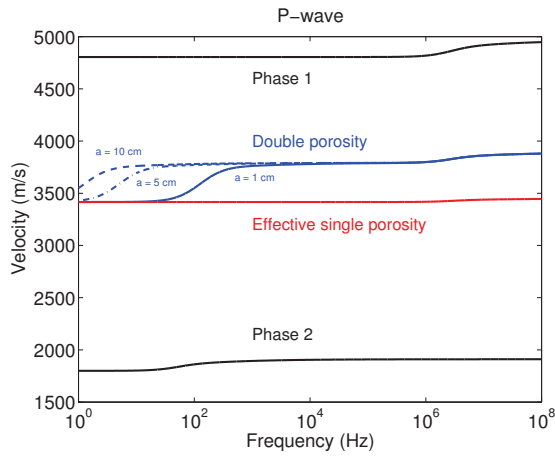
		Grès		Grès + sables	
K_s	(GPa)	39			
ρ_s	(kg/m ³)	2650			
K_f	(GPa)	2.25			
ρ_f	(kg/m ³)	1000			
η	(Pa.s)	0.001			
m		1			
V_1		1	0.99	0.97	0.95
ϕ (grès)		0.2			
ϕ (sable)		0.36			
ϕ (effectif)		0.2	0.2016	0.2048	0.2080
k_0 (grès)	(m ²)	10 ⁻¹⁴			
k_0 (sable)	(m ²)	10 ⁻⁹			
k_0 (effectif)	(m ²)	10 ⁻¹⁴	1.0101 10 ⁻¹⁴	1.0309 10 ⁻¹⁴	1.0526 10 ⁻¹⁴
K_d (grès)	(GPa)	22.3			
K_d (sable)	(GPa)	0.645			
K_d (effectif)	(GPa)	22.3	16.695	11.11	8.325
G_d (grès)	(GPa)	22			
G_d (sable)	(GPa)	0.387			
G_d (effectif)	(GPa)	22	14.12	8.22	5.8
a	(cm)	(1 ; 5 ; 10)			
V_P	(m/s)	4805	(4225 ; 4271 ; 4273)	(3664 ; 3776 ; 3783)	(3345 ; 3512 ; 3523)
V_S	(m/s)	3079	2468	1886	1586
V_{Biot}	(m/s)	16	(13.4 ; 13.5 ; 13.5)	(12 ; 11.7 ; 11.7)	(11.7 ; 10.9 ; 10.9)
Q_P		285425	(27.5 ; 343 ; 752)	(11.3 ; 109 ; 226)	(8.2 ; 65.6 ; 133)
Q_S		184620	182566	178470	174391
Q_{Biot}		0.50	(0.56 ; 0.51 ; 0.50)	(0.60 ; 0.51 ; 0.51)	(0.60 ; 0.52 ; 0.51)
ρ	(kg/m ³)	2320	2317	2312	2307

TABLE 3.3 – Paramètres physiques utilisés pour les modèles double porosité. Les vitesses et les facteurs de qualité sont calculés à 200 Hz. Les valeurs de V_P, V_{Biot}, Q_P et Q_{Biot} sont données pour $a = (1; 5; 10)$ cm. V_S, Q_S et ρ sont indépendants de a .

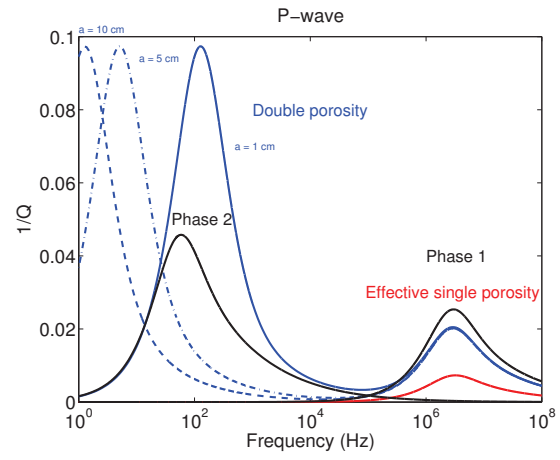
L'atténuation des ondes P pour les milieux double porosité est plus forte que pour les phases 1 et 2 et que pour le milieu simple porosité et surtout, on retrouve les deux pics d'atténuations correspondants à chaque phase dont celui à basse fréquence (phase 2) très marqué. L'augmentation de a diminue la fréquence de ce pic d'atténuation sans changer son amplitude. En revanche, ce pic d'atténuation basse fréquence est d'autant plus fort que la proportion de phase 2 augmente (V_1 diminue). Il faut également noter que les atténuations obtenues avec les milieux simple porosité équivalents sont beaucoup plus faibles avec un pic uniquement à haute

fréquence. Les valeurs des facteurs de qualité obtenus à basse fréquence pour les milieux double porosité ($Q_P \simeq 10$) sont proches des valeurs obtenus sur des données réelles. L'atténuation des ondes S et Biot dépendent très peu du type d'homogénéisation.

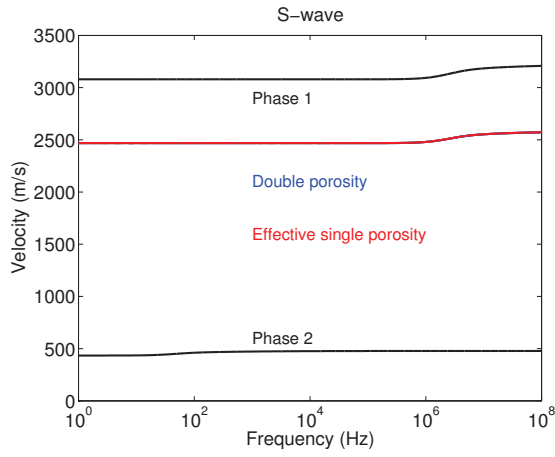
En conclusion, l'influence de la modélisation double porosité est très visible sur la dispersion des ondes P et surtout sur l'atténuation que l'on peut observer à basse fréquence dans les milieux réels (fréquences sismiques).



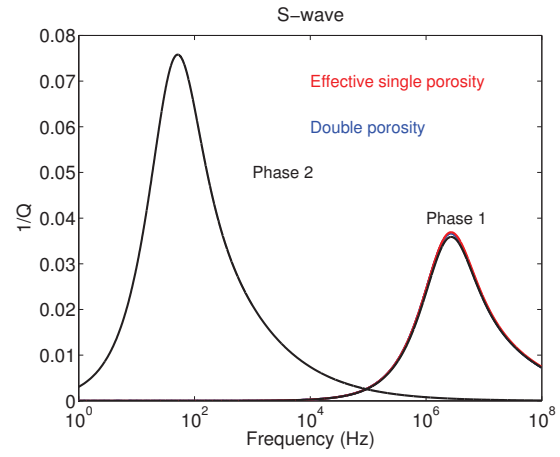
(a)



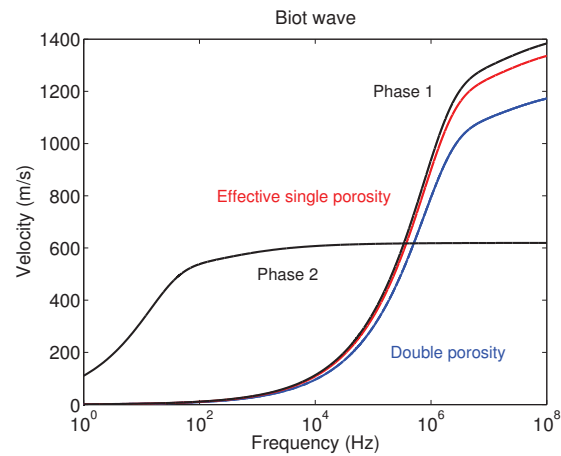
(b)



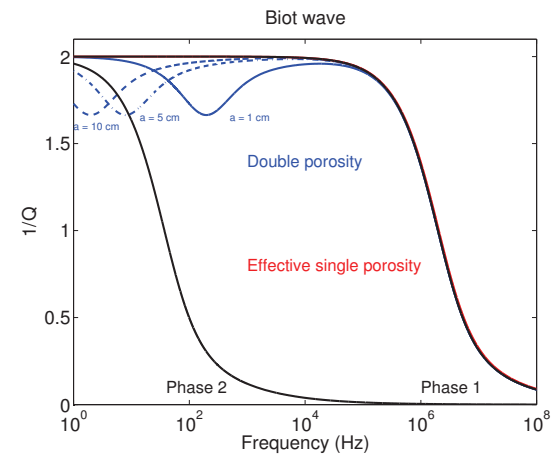
(c)



(d)

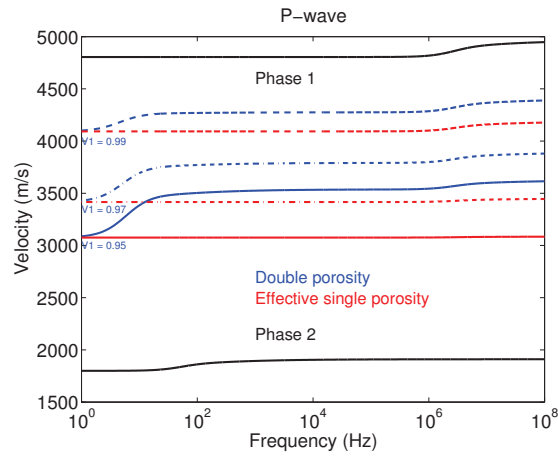


(e)

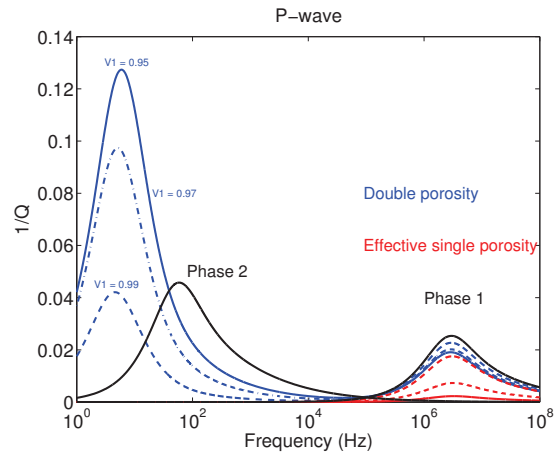


(f)

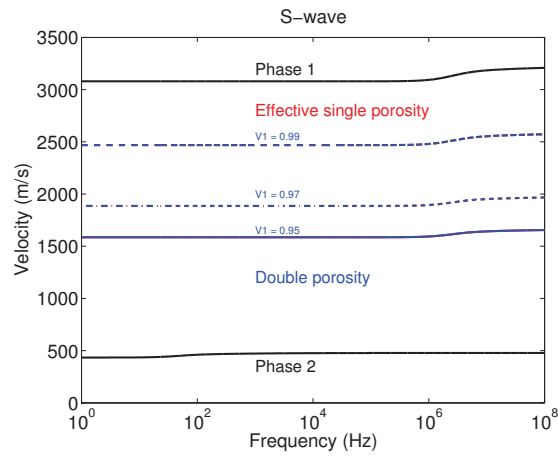
FIGURE 3.11 (*facing page*) – Vitesses (a,c,e) et atténuations ($1/Q$) (b,d,f) en fonction de la fréquence pour les ondes P (a,b), S (c,d) et Biot (e,f). Les valeurs pour chaque phase indépendante sont tracées en trait noir, les valeurs pour le milieu effectif simple porosité en trait rouge et les valeurs pour les milieux double porosité sont tracées en bleu, en considérant trois cas différents ($V_1 = 0.97$) : $a = 1$ cm (continu), $a = 5$ cm (pointillés) et $a = 10$ cm (tiretés).



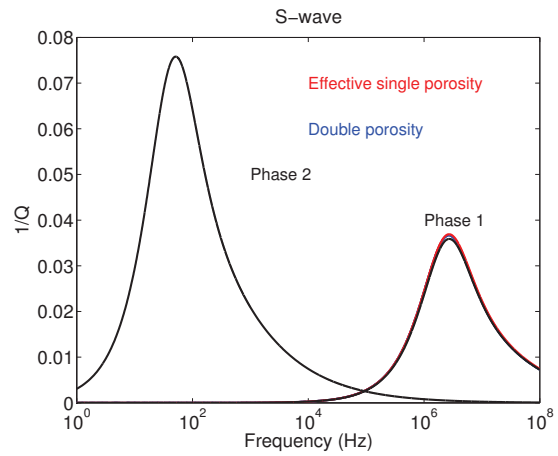
(a)



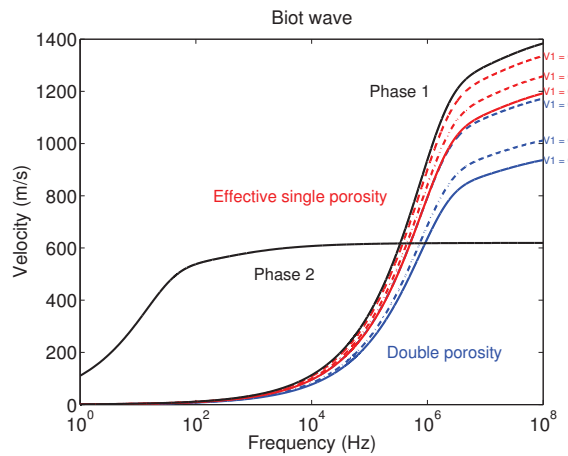
(b)



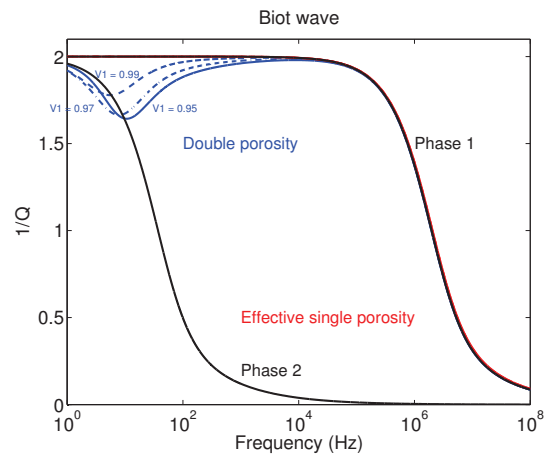
(c)



(d)



(e)



(f)

FIGURE 3.12 (*facing page*) – Vitesses (a,c,e) et atténuations ($1/Q$) (b,d,f) en fonction de la fréquence pour les ondes P (a,b), S (c,d) et Biot (e,f). Les valeurs pour chaque phase indépendante sont tracées en trait noir, les valeurs pour le milieu effectif simple porosité en trait rouge et les valeurs pour les milieux double porosité sont tracées en bleu. Trois cas différents sont considérés ($a = 5 \text{ cm}$) : $V_1 = 0.95$ (continu), $V_1 = 0.97$ (pointillés) et $V_1 = 0.99$ (tiretés).

3.4.4 Influence de la double porosité sur les formes d'ondes

On effectue maintenant des simulations de propagation d'ondes pour établir comment les variations des paramètres macroscopiques (vitesses et atténuations) ont une influence sur les formes d'ondes. On considère un milieu bicouche dont la première couche est constituée de grès consolidé "pur" et la deuxième couche du milieu double porosité (grès + sable). La géométrie du milieu et la position de la source et des récepteurs sont identiques au cas bicouche considéré dans le chapitre 2, partie 2.1, décrit par la figure 2.8. Les fréquences de simulations sont comprises entre 1 Hz et 600 Hz et la source est un ricker de fréquence centrale égale à 200 Hz . Les paramètres physiques des deux couches de grès sont décrits dans le tableau 3.3.

Les sismogrammes obtenus pour les simulations en milieu double et simple porosité sont présentés sur les figures 3.13, 3.14 et 3.15. La figure 3.13 compare les résultats pour un milieu double porosité avec $V_1 = 0.97$ et $a = 5\text{ cm}$ avec les résultats pour un milieu simple porosité équivalent. Les ondes P transmises dans le milieu double porosité sont fortement déformées par rapport au milieu simple porosité, à cause de l'atténuation et de la dispersion plus forte. En revanche, les ondes S converties sont identiques. Il faut également noter que le déphasage n'évolue pas avec l'offset.

Sur la figure 3.14, sont comparés différents modèles double porosité avec a variable avec les modèles simple porosité équivalents pour un récepteur court offset et un récepteur grand offset. Le paramètre a a une influence sur l'amplitude des ondes P transmises mais les différences sont assez faibles et uniquement pour des hétérogénéités de petite taille (les résultats sont identiques pour $a \geq 5\text{ cm}$). Sur la figure 3.15, on voit que, logiquement, les différences entre formes d'ondes entre modèles double et simple porosité sont amplifiées quand la proportion d'hétérogénéités (phase 2) augmente. La différence d'amplitude et de déphasage est plus forte pour des valeurs de V_1 faibles. Sur ces simulations de propagation d'ondes, on montre ainsi l'importance de la prise en compte de façon précise des hétérogénéités de la phase poreuse qui, même si elles sont en quantité faibles (entre 1 et 5% dans ces exemples), ont une influence non négligeable sur les temps d'arrivées, les amplitudes et les formes d'ondes dans les milieux double porosité.

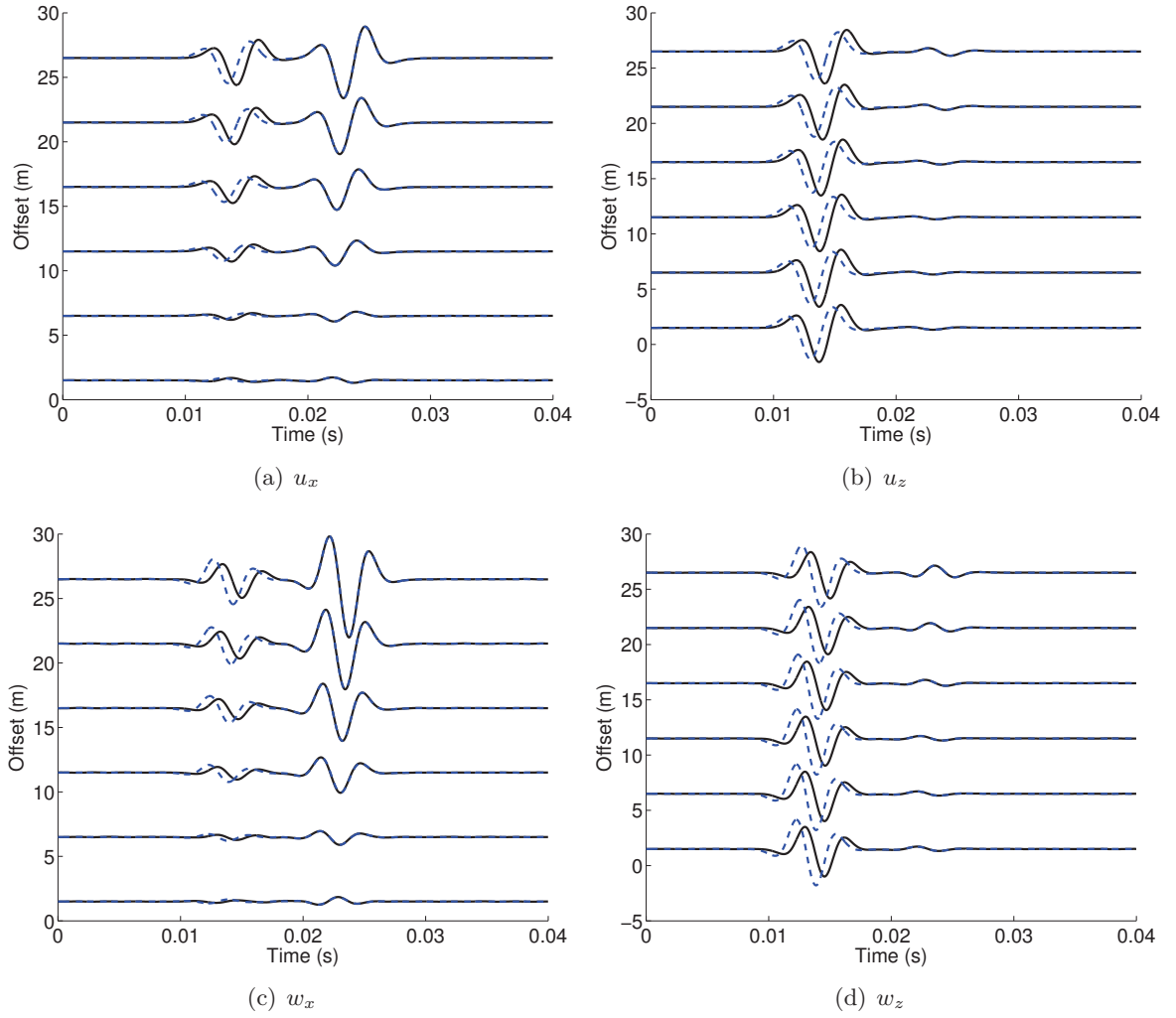


FIGURE 3.13 – Sismogrammes des déplacements solides (a,b) et relatifs fluide/solide (c,d) horizontaux (a,c) et verticaux (b,d). Le trait pointillé bleu correspond au milieu double porosité ($a = 5 \text{ cm}$ et $V_1 = 0.97$) et le trait noir continu au milieu effectif simple porosité.

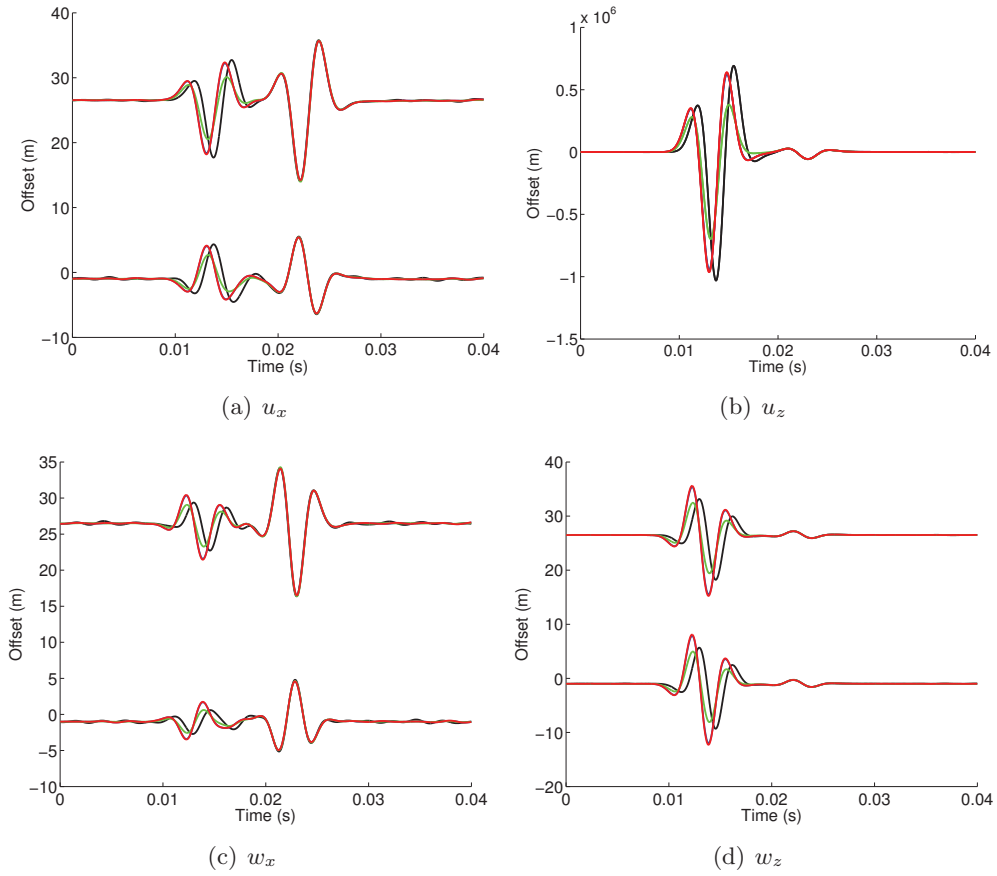


FIGURE 3.14 – Sismogrammes des déplacements solides (a,b) et relatifs fluide/solide (c,d) horizontaux (a,c) et verticaux (b,d). Le trait noir correspond au milieu effectif simple porosité ($V_1 = 0.97$), le trait vert au milieu double porosité avec $a = 1 \text{ cm}$, le trait bleu au milieu double porosité avec $a = 5 \text{ cm}$ et le trait rouge au milieu double porosité avec $a = 10 \text{ cm}$.

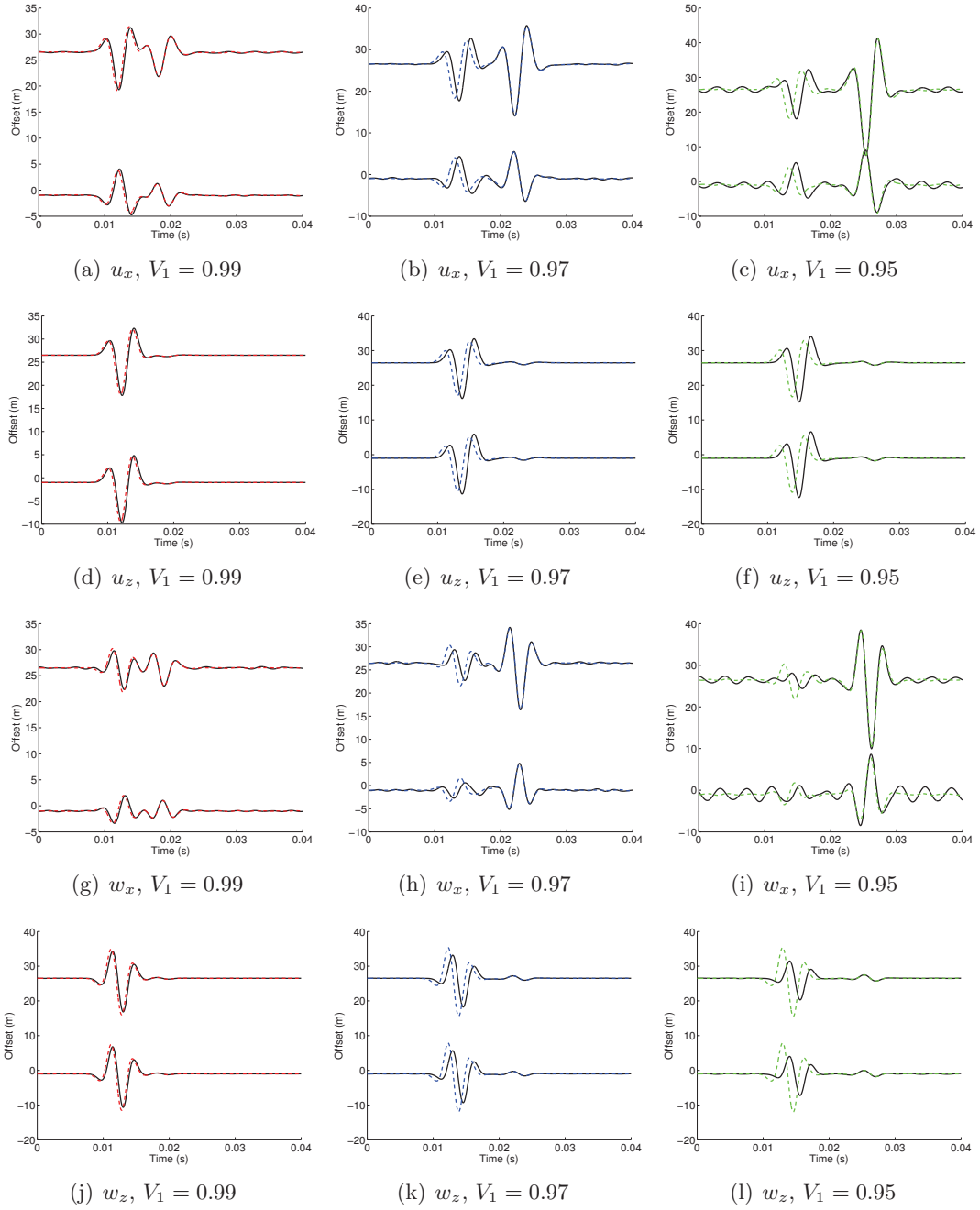


FIGURE 3.15 – Sismogrammes des déplacements solides (a à f) et relatifs fluide/solide (g à l) horizontaux (a,b,c,g,h,j) et verticaux (d,e,f,i,k,l). Le trait noir correspond au milieu effectif simple porosité pour $V_1 = 0.99$ (a,d,g,j), pour $V_1 = 0.97$ (b,e,h,k) ou pour $V_1 = 0.95$ (c,f,i,l), le trait rouge au milieu double porosité avec $V_1 = 0.99$ (a,d,g,j), le trait bleu au milieu double porosité avec $V_1 = 0.97$ (b,e,h,k) et le trait vert au milieu double porosité avec $V_1 = 0.95$ (c,f,i,l).

3.5 Saturations dans les sables non consolidés : la visco-poroélasticité

3.5.1 Analogies visco-élastiques

Dans les sédiments non consolidés partiellement saturés en eau, les vitesses des ondes P et S peuvent être très faibles et les atténuations très fortes. C'est ce que montre, par exemple, les données mesurées sur une plage californienne par Bachrach *et al.* (1998a,b) (les ondes S sont également étudiées par Bachrach *et al.* (1998c)) ou les données expérimentales de Stoll (1977), de Domenico (1977) ou de Spencer *et al.* (1994). Même si l'aspect cinématique (temps d'arrivées) est bien pris en compte par les modèles visco-élastiques classiques, les dispersions des vitesses et des atténuations ne sont pas bien modélisées.

Chotiros & Isakson (2004) montrent qu'en utilisant les modèles de Biot-Stoll (Stoll, 1977) qui prennent en compte les pertes d'énergie dues aux mouvements de fluides visqueux (Biot) et les pertes d'énergie associées aux frottements entre grains (Stoll), on peut déterminer des vitesses et des atténuations correctes à certaines fréquences. En revanche, pour une large bande fréquentielle, Chotiros & Isakson (2004) montrent qu'il faut associer à ces modèles Biot-Stoll, des mécanismes d'écoulements locaux et des forces de rappel pour le cisaillement (modèle BICSQS). Ils construisent ainsi un modèle qui donne des résultats cohérents avec ceux observés sur des données de laboratoire (par exemple Nolla *et al.* (1963) et Thomas & Pace (1980) pour les sables saturés).

D'autres auteurs ont utilisé des analogies visco-élastiques pour modéliser les milieux poreux. Par exemple, Carcione (1998) montre que des modélisations visco-élastiques sont équivalentes aux modélisations poroélastiques dans des milieux simples mais diffèrent quand le nombre d'hétérogénéités augmente, car la quantité de conversion d'ondes P en ondes de Biot diffusives devient non négligeable. Liu *et al.* (2009) en 2D et Liu *et al.* (2011) en 2.5D ont également développé une solution visco-acoustique pour les milieux double porosité (basée sur un modèle de Zener) et montrent que cette solution est correcte uniquement sur une bande de fréquences restreinte.

Le contact entre deux grains de sables est naturellement hétérogène à cause de la rugosité des grains. La répartition de la phase fluide entre les grains est donc difficile à modéliser. Le principe du modèle BICSQS est de modéliser le contact entre deux grains de sables par un contact solide entre les deux grains et par une phase fluide de faible épaisseur entre les deux grains. Sur la figure 3.16, les schémas (a) et (b) illustrent le contact entre les grains et l'hétérogénéité de celui-ci à l'échelle microscopique. Le schéma (c) montre la façon dont on peut idéaliser cette interface grain/fluide/grain.

Le comportement en compression est décrit par un contact élastique solide et associé à un comportement visco-élastique (Maxwell) du fluide piégé entre les deux grains (analogue aux modèles d'écoulements locaux de Dvorkin & Nur (1993)). Cela revient à utiliser un modèle visco-élastique de Zener (ou "Standard Linear Solid", voir Zener (1948)). Le comportement en cisaillement est contrôlé par la réponse élastique du contact solide des grains et par la réponse visqueuse de la pellicule fluide, ce qui est modélisé par un modèle visco-élastique de Kelvin-Voigt. La figure 3.17 tirée de Chotiros & Isakson (2004) résume ces analogies.

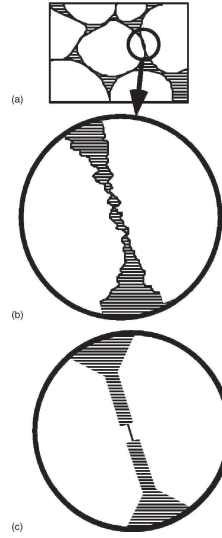


FIGURE 3.16 – Illustration de l'idéalisation du contact inter-grains des milieux non consolidés (d'après Chotiros & Isakson (2004)).

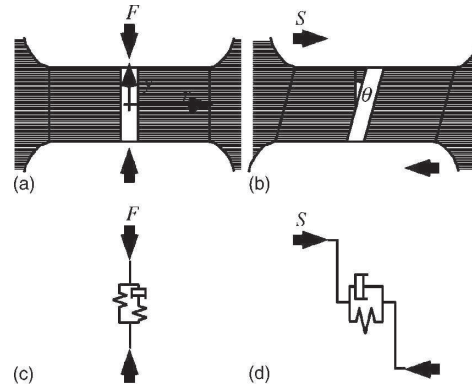


FIGURE 3.17 – Illustration de la modélisation visco-élastique des milieux non consolidés (d'après Chotiros & Isakson (2004)). Comportement en compression (a,c) et en cisaillement (b,d).

Chotiros & Isakson (2004) déduisent de ces considérations physiques un module d'incompressibilité drainé et un module de cisaillement effectifs, complexes et dépendants de la fréquence, tels que

$$\begin{aligned} K_D(\omega) &= K_{D_0} + \frac{K_y}{1 + i(2\pi f_K)/\omega} , \\ G(\omega) &= G_{D_0} \left(1 - i \frac{\omega}{2\pi f_G} \right) . \end{aligned} \quad (3.24)$$

Les fréquences f_K et f_G sont les fréquences de relaxation associées respectivement aux modules d'incompressibilité et de cisaillement. K_{D_0} et G_{D_0} sont les limites asymptotiques basse fréquence de K_D et G alors que K_y est la différence entre les valeurs limites basse et haute fréquence du module d'incompressibilité. Ce type de modèle est classique pour faire des ana-

logies visco-élastiques. Par exemple, Mavko *et al.* (2009) ont introduit une approche visco-poroélastique semblable qui consiste à prendre en compte la dispersion et l'atténuation par des modèles visco-élastiques de Zener en calculant des modules complexes qui tiennent compte des limites basse ("relaxed behaviour") et haute ("unrelaxed behaviour") fréquences des modules.

En plus de cet aspect visco-élastique permettant de prendre en compte les phénomènes de friction inter-grains, on considère une phase fluide multiphasique afin de bien prendre en compte les sables partiellement saturés en eau. On calcule les paramètres effectifs de la phase fluide par moyennes (voir partie 3.3.2). Dans l'étude des vitesses et atténuations et des formes d'ondes complètes qui suit, on se limitera à l'influence de la visco-élasticité en compression, c'est-à-dire que l'on prendra la fréquence de relaxation associée au cisaillement supérieure aux fréquences de calcul ($f_G \rightarrow \infty$).

3.5.2 Influence des modèles visco-poroélastiques sur les vitesses et atténuations des ondes

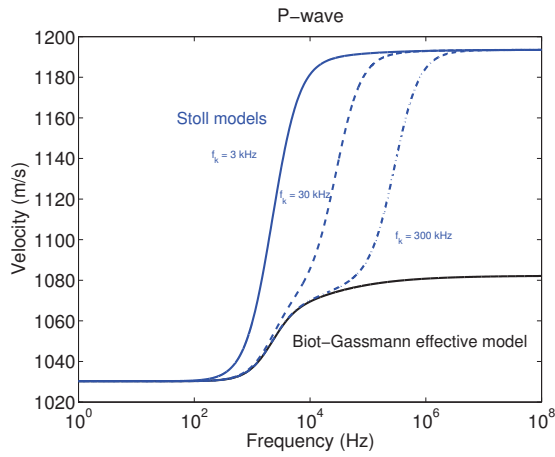
Pour illustrer l'utilisation du modèle visco-poroélastique décrit précédemment, on considère un milieu bicouche, constitué d'une couche de grès et d'une couche de sables non consolidés. Les caractéristiques du sable sont celles d'un sable de Fontainebleau (Bordes, 2005) et on prend les valeurs de Chotiros & Isakson (2004) pour les ordres de grandeurs des paramètres visco-poroélastiques (K_y , f_K et f_G). Ces valeurs ont été déterminées par essai-erreur pour correspondre aux données expérimentales. Les valeurs des paramètres physiques sont données dans le tableau 3.4. Il faut noter que les modules d'incompressibilité et de cisaillement du squelette ont des valeurs faibles (0.1 *GPa*) dans ce type de sable de proche surface (pression de confinement et donc consolidation très faibles).

Dans un premier temps, on calcule les vitesses et les atténuations poroélastiques dans le sable en utilisant le modèle décrit précédemment : figures 3.18 et 3.19. Les ondes P des modèles visco-poroélastiques (Stoll) ont le même comportement à basse fréquence que le modèle poroélastique (Biot-Gassmann). A partir de la fréquence de relaxation (de 3 à 300 *kHz* sur la figure 3.18), la dispersion des ondes P est plus forte dans les modèles de Stoll. De la même façon, l'atténuation des ondes P est plus forte (d'un facteur 2 à 3) à partir de la fréquence f_K , le pic d'atténuation étant décalé ou dédoublé pour les modèles de Stoll. On observe le même type de comportement des ondes P quelle que soit la saturation en eau, l'atténuation étant plus forte quand V_1 diminue. Pour les ondes S, on a posé une fréquence de relaxation de cisaillement $f_G = 10^{10}$ *Hz* et donc les modèles de Stoll ont un comportement identique aux modèles Biot-Gassmann quelle que soit la saturation ; les seules différences commencent à apparaître à haute fréquence ($10^7 - 10^8$ *Hz*). Les ondes de Biot, comme les ondes P, ont un comportement modifié à partir de f_K avec une dispersion plus forte et un pic d'atténuation plus marqué.

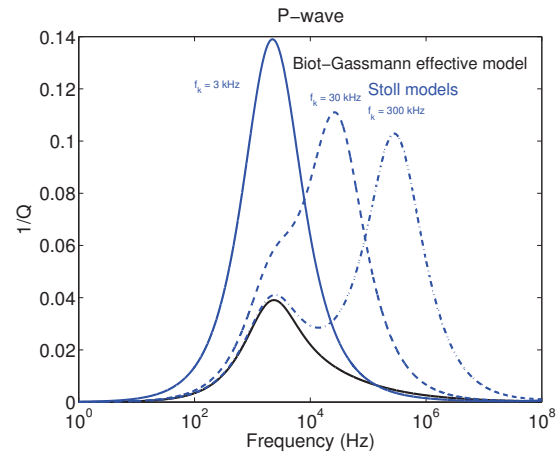
		Grès	Sables		
K_s (GPa)		39	36		
ρ_s (kg/m ³)			2650		
m		1	1.9		
ϕ		0.2	0.4		
k_0 (m ²)		10^{-14}	$5.8 \cdot 10^{-12}$		
K_d (GPa)		22.3	0.1		
G_d (GPa)		44	0.1		
K_y (GPa)			0.675		
f_K (kHz)		30	(3; 30; 300)		
f_G (Hz)			10^{10}		
V_1		1	0.8	0.6	0.2
K_f (eau) (GPa)			2.27		
K_f (air) (GPa)			$1.51 \cdot 10^{-4}$		
K_f (effectif) (GPa)		2.27	0.744	0.177	$8.77 \cdot 10^{-4}$
ρ_f (eau) (kg/m ³)			1000		
ρ_f (air) (kg/m ³)			1.2		
ρ_f (effectif) (kg/m ³)		1000	800.24	600.48	200.96
η (eau) (Pa.s)			0.001		
η (air) (Pa.s)			$1.8 \cdot 10^{-5}$		
η (effectif) (Pa.s)		0.001	$4.48 \cdot 10^{-4}$	$2 \cdot 10^{-4}$	$4.02 \cdot 10^{-5}$
V_P (m/s)		5978	(1032; 1031; 1030.6)	(608; 605; 605)	(383; 376; 376)
V_S (m/s)		4355	229	234	245
V_{Biot} (m/s)		16.2	(86; 79; 78)	(104 98 97.6)	(24.7; 24.7; 24.7)
Q_P		242528	(37.6; 114; 143)	(14 74 132)	(5.27; 44; 185)
Q_S		184620	185	143	244
Q_{Biot}		0.50	(0.46; 0.54; 0.55)	(0.52 0.58 0.58)	(0.64; 0.65; 0.65)
ρ (kg/m ³)		2320	1910	1830	1670

TABLE 3.4 – Paramètres physiques utilisés pour les modèles visco-poroélastiques non saturés. Les vitesses et les facteurs de qualité sont calculés à 200 Hz. Les valeurs de V_P, V_{Biot}, Q_P et Q_{Biot} sont données pour $f_K = (3; 30; 300)$ kHz. V_S, Q_S et ρ sont indépendants de f_K .

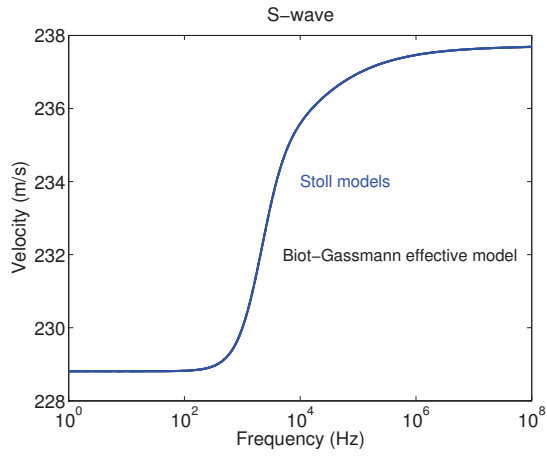
FIGURE 3.18 (facing page) – Vitesses (a,c,e) et atténuations (1/Q) (b,d,f) en fonction de la fréquence pour un milieu partiellement saturé en eau (paramètres dans le tableau 3.4) pour les ondes P (a,b), S (c,d) et Biot (e,f). La saturation est égale à $V_1 = 0.8$. On considère trois valeurs pour la fréquence de relaxation associée à K_D pour les milieux visco-poroélastiques (Stoll) : $f_K = 3$ kHz en trait bleu continu, $f_K = 30$ kHz en tiretés bleus et $f_K = 3$ kHz en tiretés-pointillés bleus. Les résultats pour un milieu poroélastique (Biot-Gassmann) équivalent sont tracés en trait noir continu.



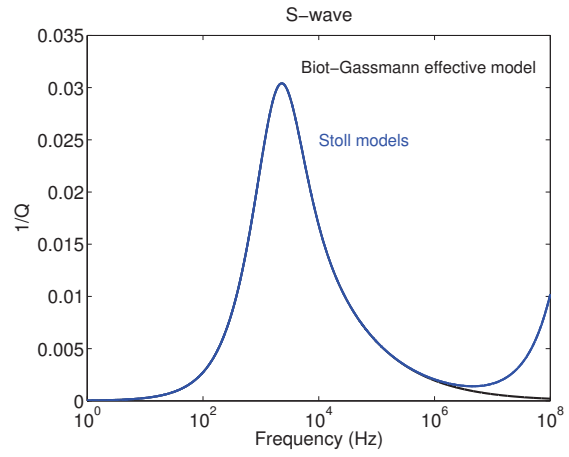
(a)



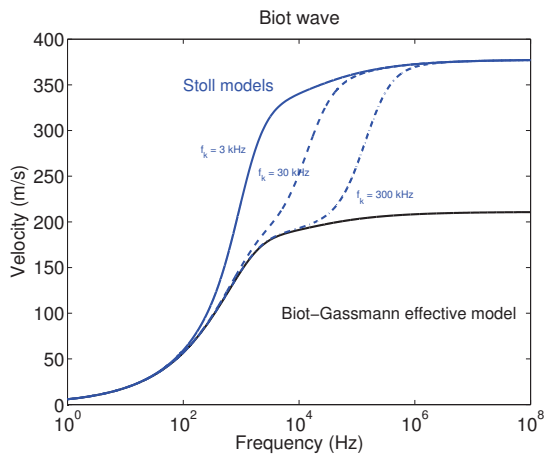
(b)



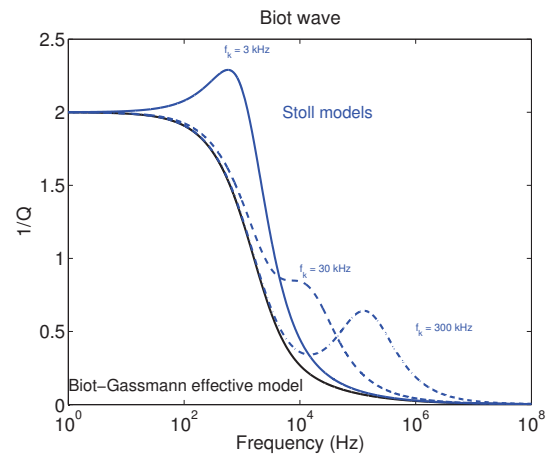
(c)



(d)

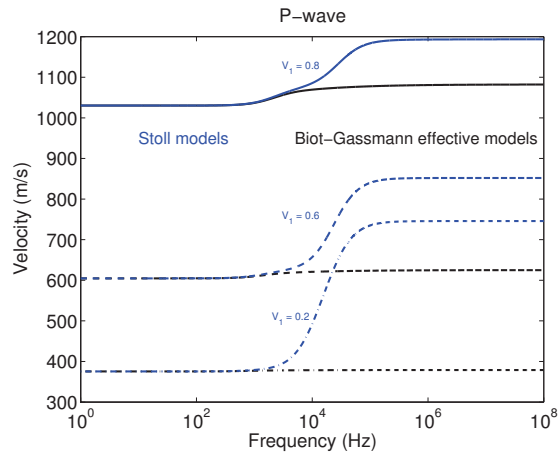


(e)

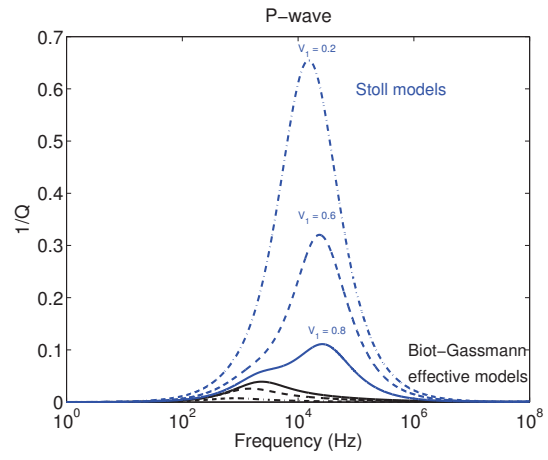


(f)

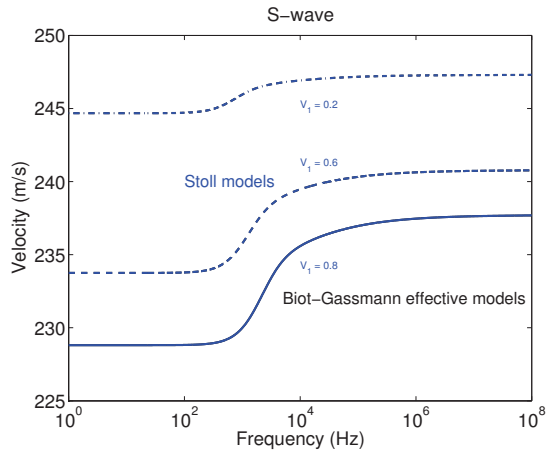
FIGURE 3.19 (*facing page*) – Vitesses (a,c,e) et atténuations ($1/Q$) (b,d,f) en fonction de la fréquence pour un milieu partiellement saturé en eau (paramètres dans le tableau 3.4) pour les ondes P (a,b), S (c,d) et Biot (e,f). La fréquence de relaxation associée à K_D est égale à $f_K = 30 \text{ kHz}$. On considère trois valeurs de saturation en eau pour les milieux visco-poroélastiques (Stoll) : $V_1 = 0.8$ en trait bleu continu, $V_1 = 0.6$ en tiretés bleus et $V_1 = 0.2$ en tiretés-pointillés bleus. Les résultats pour les milieux poroélastiques équivalents (Biot-Gassmann) sont tracés en traits noirs (continu pour $V_1 = 0.8$, tiretés pour $V_1 = 0.6$ et tiretés-pointillés pour $V_1 = 0.2$).



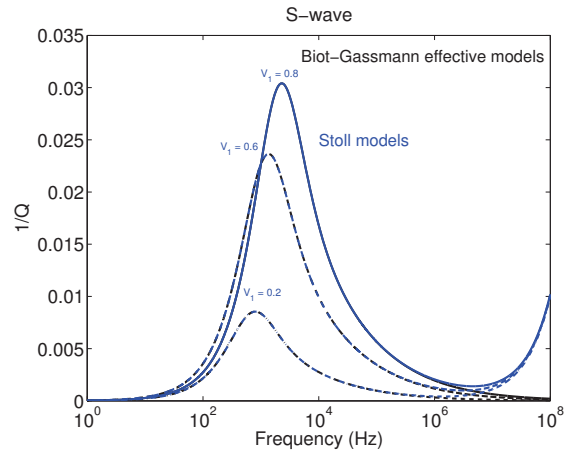
(a)



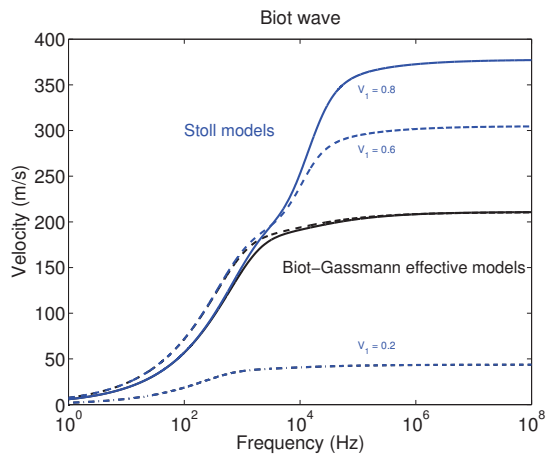
(b)



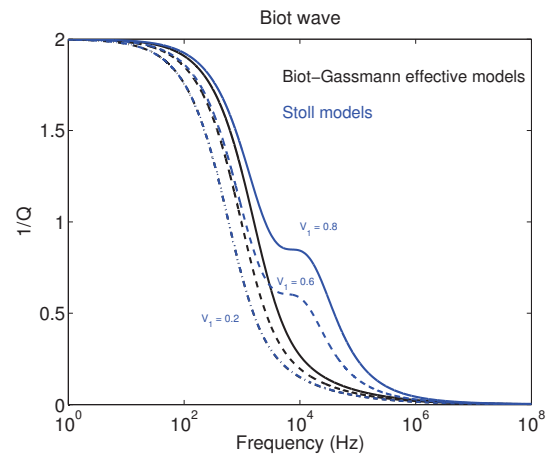
(c)



(d)



(e)



(f)

3.5.3 Influence des modèles visco-poroélastiques sur les formes d'ondes

3.5.3.1 Fréquences sismiques

La modélisation de la propagation des ondes dans ces milieux visco-poroélastiques est aisée grâce à l'approche fréquentielle du code Galerkin Discontinu qui permet de prendre en compte des paramètres dépendants de la fréquence. On considère ainsi un milieu bicouche (grès saturé en eau + sable partiellement saturé, les paramètres étant donnés dans le tableau 3.4). La géométrie du milieu et la position de la source sont identiques au cas bicouche considéré dans le chapitre 2, partie 2.1, décrit par la figure 2.8. La seule différence est la profondeur de la ligne de récepteurs qui, à cause des vitesses faibles dans les sables, est fixée ici à 12 *m* de profondeur. On étudie les signaux pour un récepteur à court offset et pour un récepteur à grand offset.

Les sismogrammes des déplacements solides et relatifs fluide/solide horizontaux et verticaux sont donnés sur les figures 3.20 et 3.21. Sur la figure 3.20 sont tracés les signaux calculés dans les milieux visco-poroélastiques pour des valeurs de fréquence de relaxation f_K variables et pour le modèle poroélastique équivalent. Il y a peu de différences de déphasages entre les modèles de Stoll et Biot-Gassmann, ceci pouvant s'expliquer par le fait que les vitesses et les atténuations à basse fréquence sont identiques (figure 3.18), les fréquences de calcul étant comprises entre 1 et 600 *Hz*. En revanche, l'amplitude des ondes P transmises et des ondes S converties est inférieure dans le cas des modèles visco-poroélastiques. On note peu de différences entre les différents modèles de Stoll qui ont des valeurs de f_K variables. Sur la figure 3.21, on remarque que la différence d'amplitude entre les modèles de Stoll et de Biot-Gassmann est plus importante quand la saturation est faible.

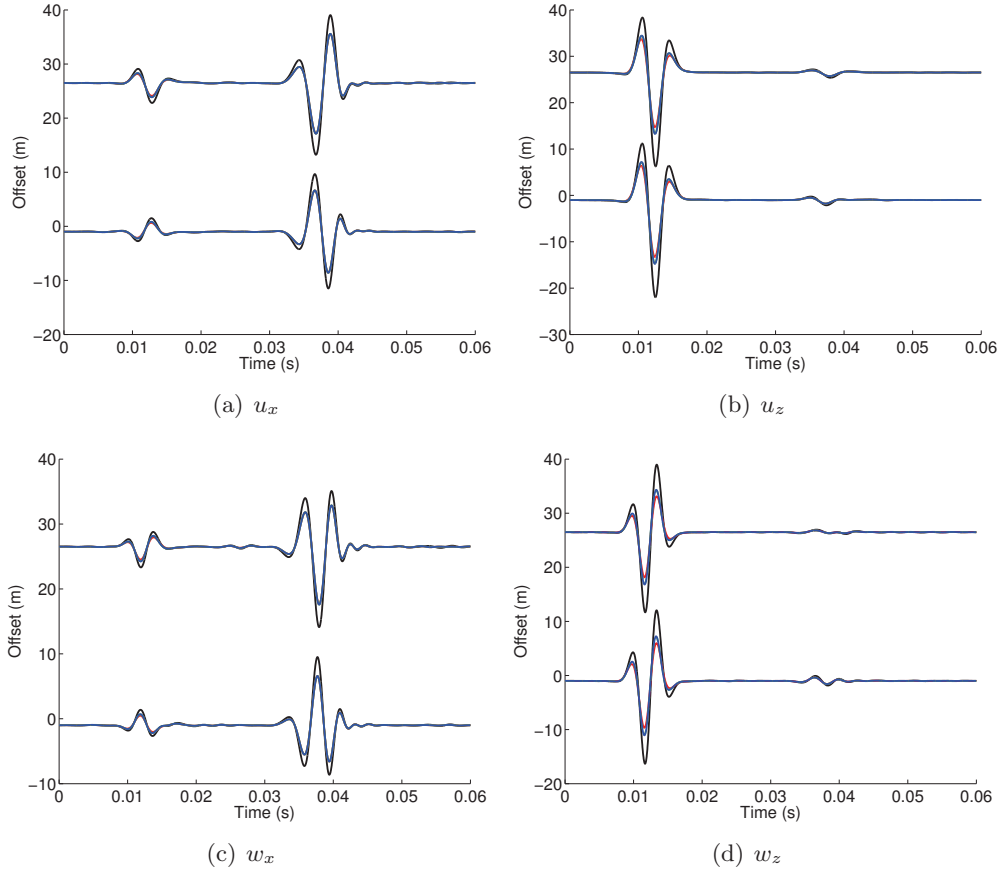


FIGURE 3.20 – Sismogrammes des déplacements solides (a,b) et relatifs fluide/solide (c,d) horizontaux (a,c) et verticaux (b,d). Le trait noir continu correspond au milieu effectif (Biot-Gassmann) calculé par moyennes, le trait rouge au modèle stoll avec $f_K = 3 \text{ kHz}$, le trait vert au modèle stoll avec $f_K = 30 \text{ kHz}$ et le trait bleu au modèle stoll avec $f_K = 300 \text{ kHz}$ (bleu et vert sont confondus). Les modèles Stoll sont calculés pour une saturation égale à $V_1 = 0.8$.

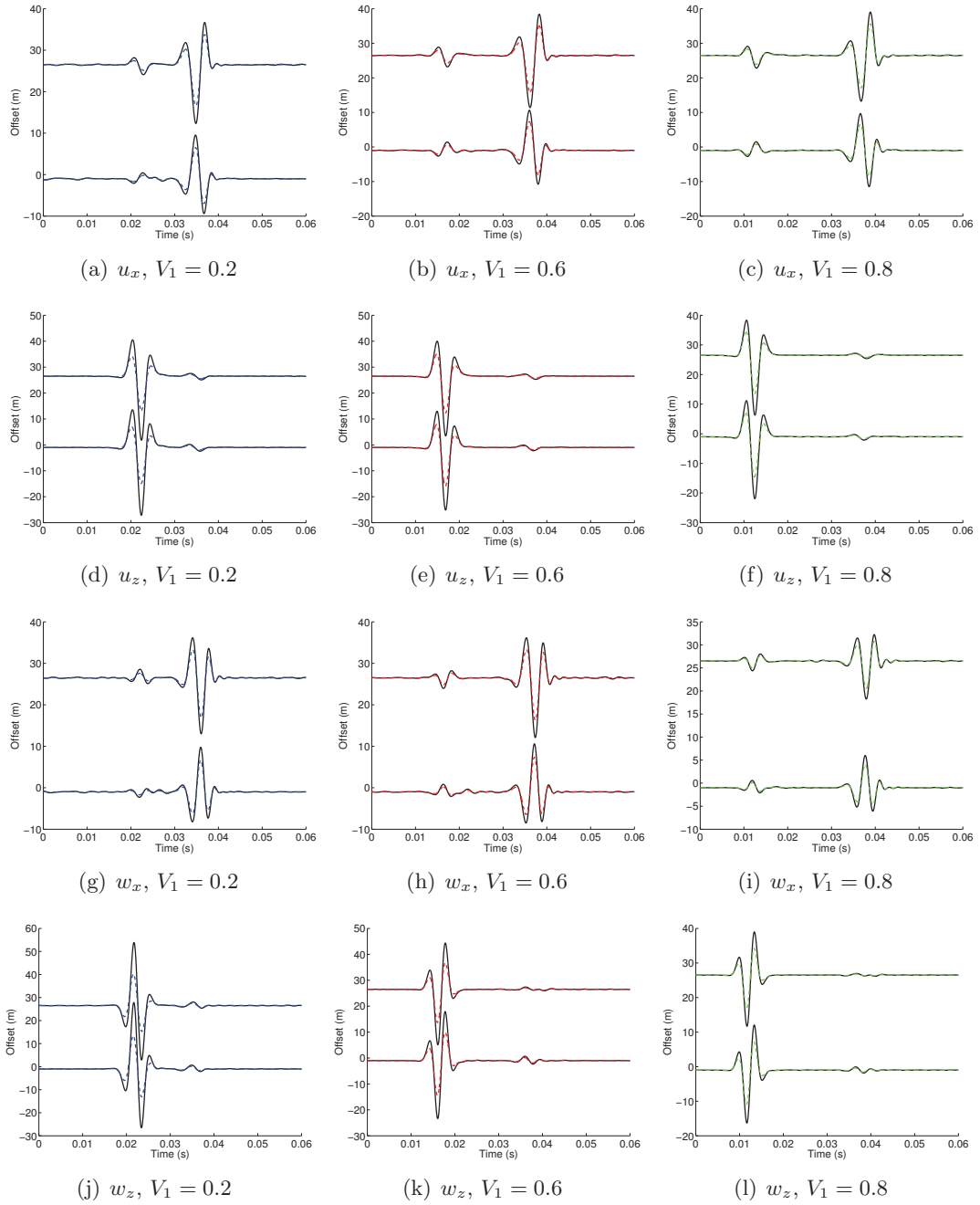


FIGURE 3.21 – Sismogrammes des déplacements solides (a à f) et relatifs fluide/solide (g à l) horizontaux (a,b,c,g,h,j) et verticaux (d,e,f,j,k,l). Le trait bleu pointillé correspond au modèle Stoll avec une saturation égale à $V_1 = 0.20$ (a,d,g,j). Le trait rouge pointillé correspond au modèle Stoll avec une saturation égale à $V_1 = 0.60$ (b,e,h,k) et le trait vert pointillé correspond au modèle Stoll avec une saturation égale à $V_1 = 0.8$ (c,f,i,l). Les traits noirs correspondent aux milieux effectifs respectifs Biot-Gassmann calculés par moyennes.

3.5.3.2 Hautes fréquences

Les variations de vitesses et d'atténuations (figures 3.18 et 3.19) dues aux modèles visco-poroélastiques ont lieu à haute fréquence (à partir de la fréquence de relaxation f_K) et donc dans les fréquences sismiques ($f \leq 1000 \text{ Hz}$), on observe des différences uniquement sur les amplitudes des ondes mais pas de déphasages ou de distorsions de la forme d'onde (figures 3.20 et 3.21). On considère ainsi le même type de milieu bicouche que précédemment ; les paramètres physiques des deux couches sont décrits dans le tableau 3.4 et la configuration du milieu, de la source et des récepteurs est donnée par la figure 2.8 (chapitre 2, partie 2.1). Cependant, on considère un facteur d'échelle de 100 sur les distances et 1000 sur les fréquences : le milieu fait $40 * 40 \text{ cm}$ (au lieu de $40 * 40 \text{ m}$), la fréquence de la source est de 200 kHz (au lieu de 200 Hz) et les fréquences de simulations comprises entre 1 et 600 kHz (au lieu de 1 et 600 Hz). Ce changement d'échelle permet de considérer des expériences de laboratoire.

Les sismogrammes obtenus sont représentés sur la figure 3.22 où l'on considère un milieu non saturé ($V_1 = 0.6$) avec une fréquence de relaxation de $f_K = 30 \text{ kHz}$. Comme on est dans la gamme de fréquence où la dispersion et l'atténuation des ondes P et Biot sont fortement différents entre les modèles de Stoll et Biot-Gassmann, les formes d'ondes sont radicalement différentes. L'amplitude des ondes P transmises est très inférieure pour le modèle visco-poroélastique (bien visible sur les déplacements verticaux) et les formes d'ondes P sont également très déformées. Les ondes S converties sont plus proches entre les deux modèles mais l'amplitude est tout de même inférieure pour le modèle de Stoll.

Pour modéliser l'atténuation dans les milieux de subsurface et donc à basse fréquence, on peut également considérer des fréquences de relaxation f_K et f_G dans la gamme des fréquences sismiques (1 à 1000 Hz).

L'introduction des phénomènes visco-élastiques dus à la friction entre grains d'un milieu non consolidé et associés aux phénomènes poroélastiques "classiques" (interactions fluide/solide) permet de mieux prendre en compte l'atténuation dans ces milieux de faibles vitesses. Dans les modélisations effectuées dans cette partie, la prise en compte de la non saturation a été faite par des moyennes simples alors que l'on a vu dans la partie 3.3 que l'utilisation de modèles de saturation partielle modifiait beaucoup les formes d'ondes et les attributs sismiques obtenus. C'est donc une piste permettant d'améliorer le modèle visco-poroélastique utilisé dans cette partie.

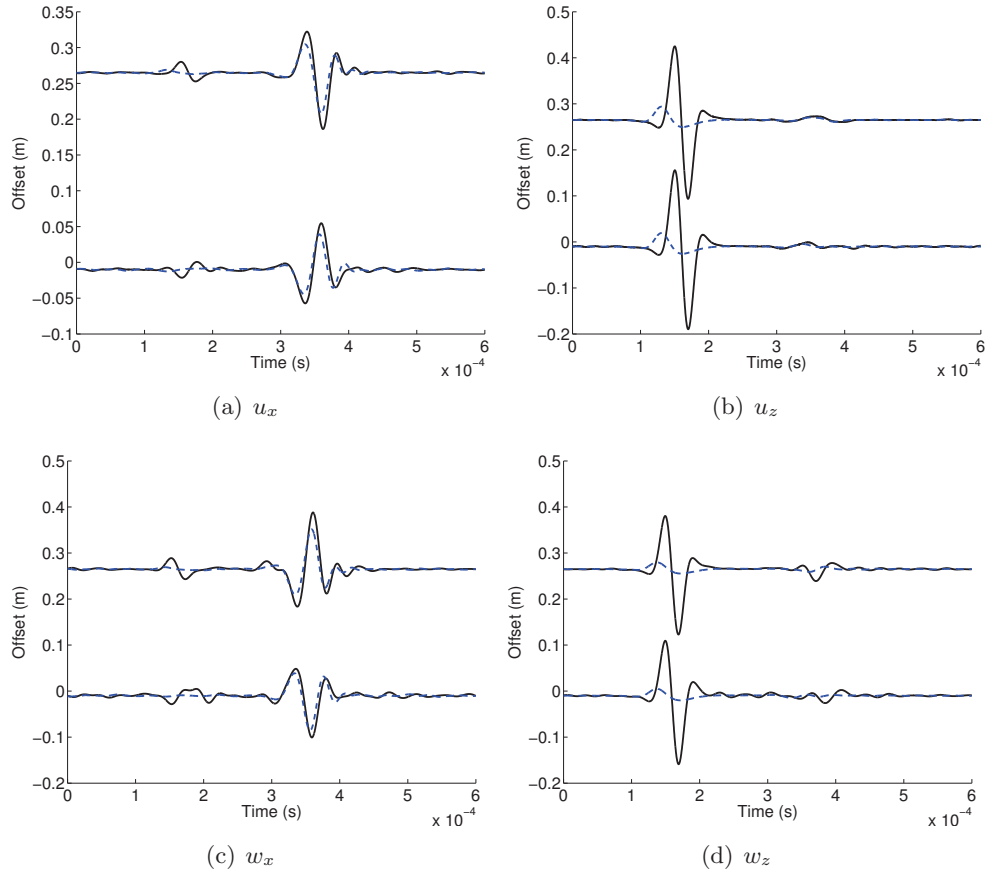


FIGURE 3.22 – Sismogrammes des déplacements solides (a,b) et relatifs fluide/solide (c,d) horizontaux (a,c) et verticaux (b,d). Le trait noir continu correspond au milieu effectif (Biot-Gassmann) calculé par moyennes, le trait bleu pointillé au modèle stoll avec $f_K = 30 \text{ kHz}$ et $V_1 = 0.6$.

Conclusion partielle

Dans ce chapitre, on a utilisé des descriptions physiques plus complexes afin de mieux rendre compte des attributs sismiques observés sur les données réelles. En effet, la théorie de Biot-Gassmann “classique” ne suffit pas à décrire les atténuations et les dispersions observées sur les données réelles. Les phénomènes responsables de ces atténuations et dispersions sont principalement dues à des écoulements de fluides induits par le passage des ondes à l’échelle mésoscopique (Pride *et al.*, 2004). Le nombre de modèles différents pour rendre compte de ce type de phénomènes est à peu près aussi grand que la diversité des formations géologiques poreuses (Muller *et al.*, 2010; Mavko *et al.*, 2009).

Afin d’utiliser une théorie de Biot-Gassmann généralisée pour calculer la propagation d’ondes dans ces milieux, on s’est intéressé uniquement aux modèles d’homogénéisations sur un volume élémentaire représentatif qui amènent à considérer des modules effectifs complexes et dépendants de la fréquence. On a également pris en compte des modélisations “analogiques” visco-poroélastiques.

En étudiant des milieux géologiques partiellement saturés, fracturés ou non consolidés, on a montré que l'utilisation de théories prenant en compte les phénomènes à l'échelle mésoscopique était cruciale pour bien modéliser la propagation d'ondes, les formes d'ondes (amplitude, déphasage) étant radicalement différentes suivant le modèle utilisé. La modélisation visco-poroélastique donne également des résultats intéressants mais les paramètres à régler (fréquences de relaxation, limites basse et hautes fréquences du module d'incompressibilité) sont difficiles à relier à des phénomènes physiques.

En revanche, les caractéristiques géométriques qu'il faut définir pour décrire les milieux multiphasiques ont peu d'influence sur les formes d'ondes obtenues. En effet, pour conserver des solutions analytiques, on a supposé que l'inclusion d'une phase dans l'autre se faisait sous forme de sphères où le rayon de la sphère interne est a ; c'est ce paramètre qui doit être réglé empiriquement et même si on observe une influence notable sur les paramètres macro-échelles (vitesses et atténuations), les formes d'ondes sont peu influencées par ce paramètre. Il pourrait ainsi être intéressant d'étudier d'autres configurations géométriques plus réalistes pour déterminer si la description géométrique nécessite une grande précision.

De multiples phénomènes d'atténuations peuvent être également pris en compte. Par exemple, Helle *et al.* (2003) montrent qu'avec une distribution fractale de patches de fluides, de multiples conversions d'ondes P en ondes de Biot propagatives créent des déperditions d'énergie significatives. Grâce à l'approche fréquence-espace du code de modélisation de la propagation d'ondes, il est possible de prendre en compte les modèles rhéologiques variés et calculer les formes d'ondes complètes sans approximation. Ce type de calcul est extensible à des modèles variés et plus ou moins complexes, à condition que l'on puisse se rapporter à une théorie de Biot-Gassmann généralisée. On a ainsi montré que les dépendances fréquentielles touchaient non seulement les modèles physiques mais également les paramètres macro-échelles (vitesses et atténuations) et donc les formes d'ondes. Ren *et al.* (2009), par exemple, montrent que les coefficients de réflexion déterminés par analyse AVO dans les milieux poroélastiques dépendent non seulement de l'angle mais également de la fréquence. Cet aspect fréquentiel est crucial pour bien modéliser la propagation des ondes dans ce type de milieu poroélastique complexes mais également pour la caractérisation des paramètres poroélastiques par inversion.

Chapitre 4

Inversion des paramètres poroélastiques par optimisation globale

Sommaire

4.1	Inversion des paramètres poroélastiques par “downscaling”	137
4.2	Méthodes d’optimisation globale	140
4.3	Sensibilité des paramètres poroélastiques	142
4.3.1	Inversion de tous les paramètres en milieux saturés	143
4.3.2	Inversion des paramètres du squelette en milieux saturés	151
4.3.3	Inversion du type de fluide saturant (milieux saturés)	152
4.3.4	Inversion de la saturation et des paramètres du squelette (milieux non saturés)	160
4.3.5	Conclusion sur la sensibilité des paramètres poroélastiques	165
4.4	Applications synthétiques	167
4.4.1	Monitoring de réservoir	167
4.4.1.1	Description du modèle	167
4.4.1.2	Inversions acoustiques et downscaling pour le modèle de base	173
4.4.1.3	Inversions élastiques et downscaling pour le modèle de base .	174
4.4.1.4	Inversions acoustiques et downscaling pour le modèle après injection	174
4.4.1.5	Conclusion sur le modèle de réservoir	176
4.4.2	Application hydrogéophysique de subsurface	177
4.4.2.1	Description du modèle	177
4.4.2.2	Tomographie des temps de premières arrivées et downscaling	181
4.4.2.3	Apport des données de vitesses et des ondes S et des atténuations sur le downscaling	184
4.4.2.4	Interprétation des données réelles	186

Introduction

Le but de l'imagerie géophysique est de retrouver les paramètres physiques qui décrivent le milieu terrestre auquel on s'intéresse, à partir d'enregistrements ponctuels, en surface ou en forage. Ces enregistrements de données physiques sont de plusieurs natures : ondes mécaniques, ondes électromagnétiques, phénomènes électriques... Lorsque les ondes sismiques se propagent dans le milieu terrestre, elles sont diffractées, réfléchies, réfractées... par les hétérogénéités du milieu et la mesure des ondes sismiques en surface est donc porteuse d'information sur le milieu qu'elles ont traversé, un peu à la manière d'un filtre qui va modifier la propagation et laisser sa trace dans le phénomène enregistré. Historiquement, l'utilisation des ondes sismiques pour caractériser les interfaces à l'intérieur de la Terre est très ancienne et a débuté avec la mise en évidence, grâce à l'étude des télé-séismes, des discontinuités majeures "stratifiant" la structure terrestre interne : discontinuité de Mohorovičić (limite croûte-manteau supérieur), discontinuité de Gutenberg (limite manteau-noyau), discontinuité de Lehman (limite noyau externe-graine)...

Cependant, l'information contenue dans les données sismiques a longtemps été partiellement utilisée. En effet, les méthodes de tomographie des temps d'arrivées n'interprètent que les premières arrivées ; les méthodes de sismique-réflexion interprètent qualitativement les réflecteurs du milieu ; l'inversion des courbes de dispersion des ondes de surface donne des informations sur les ondes S ; les analyses AVO ("Amplitude Variation with Offset" ou "Amplitude Versus Offset") prennent en compte les amplitudes des réflexions des ondes P ou S. Les approches récentes d'inversion des formes d'ondes complètes ("FWI = Full Waveform Inversion") visent à interpréter la totalité du signal enregistré. D'abord utilisé en approximation acoustique (Tarantola, 1984; Ravaut *et al.*, 2004), sur des données réelles 3D (Sirgue *et al.*, 2009; Plessix & Perkins, 2010), puis en approximation élastique (Brossier *et al.*, 2009a; Brossier, 2009) pour des applications liées à l'exploration pétrolière, la méthode a également été utilisée à des échelles de laboratoire (Bretaudière *et al.*, 2011), de proche surface (Gélis *et al.*, 2007; Romdhane *et al.*, 2011; Roques *et al.*, 2010), crustales (Operto *et al.*, 2006) ou lithosphériques (Roecker *et al.*, 2010; Pageot *et al.*, 2009). Les paramètres inversés dans ces études sont les vitesses des ondes P (cas acoustique) et des ondes P et S (cas élastique), la masse volumique moyenne du milieu, les paramètres anisotropes (Plessix & Cao, 2011; Gholami *et al.*, 2010) et les atténuations (Hicks & Pratt, 2001; Malinowski *et al.*, 2011).

Toutes ces études visent à interpréter les signaux sismiques en terme de paramètres macro-échelles (vitesses, atténuations, masse volumique moyenne, coefficients de réflexion...), ce qui constitue une première étape d'inversion. Les paramètres poroélastiques décrivant la structure microscopique du milieu (porosité, consolidation...) sont rarement étudiés, seulement à partir de relations empiriques cas-dépendantes. De Barros & Dietrich (2008) ont analysé les sensibilités des paramètres poreux aux ondes sismiques en calculant les dérivées de Fréchet associées à chaque paramètre pour un milieu stratifié (voir également l'annexe B). Morency *et al.* (2009) ont confirmé l'importance de la sensibilité relative des paramètres poreux et l'influence de la paramétrisation en calculant les noyaux de sensibilité 2D. En effet, par le calcul de l'interaction entre les champs directs et adjoints, ils démontrent l'influence du choix de la paramétrisation des paramètres poroélastiques (paramètres relatifs, racines carrées...) sur la sensibilité. Bosch (2004) est le premier à inverser les paramètres poroélastiques directement à partir des signaux sismiques. Par une optimisation locale basée sur les méthodes de Newton, il inverse conjointement les amplitudes sismiques en impédances élastiques et les impédances en porosité. Cependant, l'approche passe toujours par les paramètres macro-échelles puisque qu'il y a, en

premier lieu, une étape d’inversion basée sur les paramètres élastiques. Les seules tentatives d’inversion directe des formes d’ondes complètes ont été réalisées par De Barros *et al.* (2010) en milieu stratifié. Ils montrent que l’inversion simultanée multi-paramètres est difficile à cause du fort couplage entre certains paramètres, sauf si on utilise une approche différentielle (pour plus de détails, voir l’annexe B). Morency *et al.* (2011) utilise ce type d’approche différentielle (suivi d’injection de CO_2) pour déduire quels paramètres poreux sont inversibles à partir de quels attributs sismiques en utilisant plusieurs modèles physiques (acoustique, élastique sans et avec relations de Gassmann ou poroélastique).

Ces méthodes d’inversion en une seule étape visent à passer directement des données macro-échelles (sismogrammes) aux paramètres micro-échelles (poroélastiques). Dans ce chapitre, on va utiliser une méthode d’inversion en deux étapes, la première consistant à reconstruire les paramètres macro-échelles et la seconde à interpréter ces derniers en terme de paramètres microscopiques par des relations de physiques des roches.

4.1 Inversion des paramètres poroélastiques par “downscaling”

Dans les trois chapitres précédents, on a essayé de décrire au mieux les paramètres physiques des milieux poreux à l’échelle microscopique (porosité, perméabilité, modules mécaniques, masses volumiques...), afin de pouvoir calculer la propagation des ondes sismiques de la façon la plus précise possible. Dans ce chapitre, on va aborder l’approche inverse. À partir des paramètres macro-échelles (vitesses et atténuations) déterminés par la première étape d’inversion, on va tenter, dans une seconde étape, de retrouver les paramètres micro-échelles qui décrivent le milieu ; c’est le principe du “downscaling”, qui revient à passer d’une échelle de description macroscopique à une échelle de description microscopique.

De nombreux modèles essaient de relier vitesses des ondes P et S et porosité. En général, une augmentation de la porosité crée une diminution de la vitesse des ondes P et S, les modules d’incompressibilité et de cisaillement du squelette diminuant quand le volume des pores augmente. Des relations empiriques permettent de relier V_P et ϕ mais dépendent du type de roches car elles sont basées sur des mesures expérimentales. Par exemple, Han *et al.* (1986) ont établi des relations linéaires entre V_P , V_S et la porosité et la teneur en argile pour des sédiments détritiques tout au long de leur évolution diagénétique (des sables non consolidés aux grès). D’autres relations empiriques ont été établies, par exemple, celles de Wyllie *et al.* (1956), Raymer *et al.* (1980) ou Raïga-Clemenceau *et al.* (1988). Cependant, dans ces relations, la vitesse des ondes P est seulement liée à la porosité alors que, dans les cas réels, la rigidité du milieu drainé (squelette) entre également en jeu. Cette rigidité dépend, elle-même, de la rigidité des grains minéraux et de leur agencement (géométrie, compaction...). À cela, il faut associer la rigidité des fluides contenus dans les pores. D’autre part, de nombreuses relations empiriques entre V_P et V_S ont été établies pour différentes roches (compilées, par exemple, par Castagna *et al.* (1993) pour les calcaires, les grès, les marnes et les dolomites).

Les approches consistant à inverser les paramètres poroélastiques à partir des données macro-échelles déduites des signaux sismiques (vitesses, atténuations, AVO...) ont été abordées par différents auteurs. Berryman *et al.* (2002) relient les vitesses de propagation V_P et V_S à la porosité et à la saturation en eau pour différents types de roches en se basant sur des données expérimentales. En fixant tous les autres paramètres, Tang & Cheng (1996) déduisent la

perméabilité à partir des ondes de Stoneley générées en puits. Bosch (1999) a introduit une approche stochastique (fonctions de densité de probabilité, méthodes Monte-Carlo) pour inverser des données géophysiques de façon conjointe (données sismiques, électromagnétiques et gravimétriques). Ce type d'approche a été repris par Chotiros (2002) sur des données sismiques pour les sables saturés. Il montre que l'interprétation par des modèles visco-élastiques est impossible à cause des pertes d'énergie lors de réflexions non expliquées. Il utilise donc une modélisation poroélastique pour son inversion, où il tente de déduire le module d'incompressibilité drainé K_D et le module de cisaillement drainé G_D à partir des vitesses et des atténuations des ondes P et S (V_P , V_S , Q_P et Q_S). Il propose également des améliorations en introduisant des modèles plus complexes (matériaux composites ou variation de porosité avec la pression fluide). De la même façon, par des méthodes stochastiques, Bachrach (2006) inverse les données sismiques pour déduire des cartes de valeurs de la porosité et de la saturation. Gunning & Glinsky (2007) essaient également d'inverser les caractéristiques géométriques des grains (granoclassement) en plus de la porosité dans le but de déduire la perméabilité du milieu. Pour cela, ils utilisent des données AVO à offsets variables. De même, van Dalen *et al.* (2010) montrent qu'il est possible d'inverser simultanément la perméabilité et la porosité en utilisant les informations contenues dans les dépendances fréquentielles et angulaires des coefficients de réflexions (PP et PS).

Dans ce chapitre, je me suis basé sur les relations de Gassmann (1951) (équation 1.36) qui permettent de calculer les variations du module d'incompressibilité du milieu drainé (et donc, de V_P) lors d'une substitution (complète) du fluide saturant le milieu poreux. Cela nécessite de bien connaître les propriétés des fluides (modules, masses volumiques, viscosités), la plupart étant résumés par Batzle & Wang (1992) ou dans le livre de Mavko *et al.* (2009). Cependant, en utilisant les relations de Gassmann, on doit faire face aux hypothèses limitatrices suivantes :

- Les modules calculés ne sont valables qu'à basse fréquence. Pour s'affranchir de ce problème, la prise en compte de modules dépendants de la fréquence pour des milieux complexes (double porosité, partiellement saturé, analogies visco-poroélastiques, voir chapitre 3) permet d'étendre la validité sur une large bande de fréquence.
- Le milieu est supposé isotrope. Brown & Korringa (1975) ont étendu les relations aux milieux poreux anisotropes mais cela nécessite d'avoir une bonne connaissance de l'anisotropie, ce qui est difficile même avec des essais de laboratoire bien contraints.
- Le squelette solide est constitué de grains identiques. Pour prendre en compte des compositions minéralogiques différentes, on peut calculer par moyennes (Reuss-Voigt ou Hashin-Shtrickman) les modules solides équivalents (voir paragraphe 1.3 du chapitre 1).
- Les pores sont saturés par un seul fluide. Domenico (1976) et Brie *et al.* (1995) par exemple, ont proposé d'utiliser des moyennes simples, en partie empiriques, pour calculer les paramètres d'un fluide effectif. Cependant, l'influence des fluides multiphasiques sur les ondes sismiques, provient aussi de la répartition spatiale de chaque fluide. C'est ce que l'on a montré dans la partie 3.3 du chapitre 3.

L'utilisation des relations de Gassmann (généralisées ou non) nous sert de base pour le "downscaling" des paramètres poroélastiques. Les paramètres macro-échelles qui seront inversés sont classiquement les vitesses des ondes P et S. Ce sont les données qui sont extraites des sismogrammes par tomographie des temps d'arrivées. Avec l'avènement des techniques d'inversion des formes d'ondes complètes, on peut espérer obtenir des images plus haute résolution et utiliser également les atténuations des ondes P et S via une meilleure estimation des facteurs de qualité Q_P et Q_S . D'autres paramètres ou combinaisons de paramètres peuvent être envisagés,

comme les impédances (acoustiques, élastiques ou associées aux ondes P et S), les paramètres de Lamé ou les paramètres issus d’interprétations AVO (coefficients de réflexion, gradients...)... De plus, l’utilisation des ondes S est cruciale pour plusieurs raisons :

- cela permet d’avoir plus de données, ce qui n’est pas négligeable pour le système d’inversion largement sous-déterminé que nous considérons,
- les effets des paramètres non associés au fluide (porosité, compaction teneur en argile...) sur V_P et V_S sont similaires mais en revanche, seule la saturation en fluide a des effets différents sur V_P et V_S (voir figure 4.1 et Berryman *et al.* (2002)).

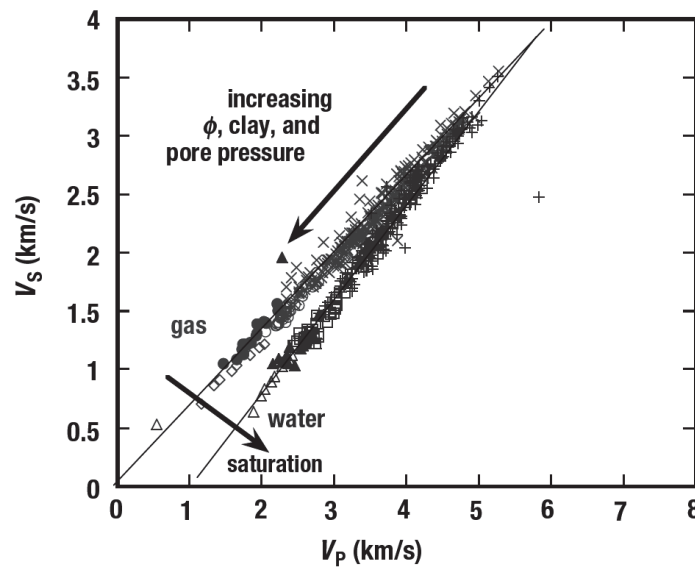


FIGURE 4.1 – V_P en fonction de V_S pour des grès saturés en eau et en air. Il faut noter que l’évolution de la saturation est perpendiculaire à l’évolution de la porosité et d’autres paramètres du squelette. Les effets des paramètres indépendants du fluide sont similaires sur V_P et V_S (courbes de tendances identiques). En revanche, le changement de saturation a un effet différent sur V_P et sur V_S , la vitesse des ondes S permet donc, de discriminer les effets du fluide sur les vitesses lorsque les vitesses sont faibles. Figure tirée de Avseth *et al.* (2005).

Dans ce chapitre, on va décrire dans une première partie quels paramètres sont inversibles (en fonction de leur sensibilité) à partir de quelles données. Ensuite, on appliquera cette étape de downscaling sur des cas synthétiques réalistes. Après avoir calculé des sismogrammes par propagation d’ondes poroélastiques dans le milieu de référence (décrit par les paramètres poreux micro-échelles), on va faire une étape d’inversion des sismogrammes pour retrouver des paramètres macro-échelles (par tomographie des temps d’arrivées ou par inversion des formes d’ondes complètes). Enfin, la dernière étape consistera à retrouver les paramètres micro-échelles par inversion globale des paramètres macro-échelles. Cette dernière étape d’inversion se basera sur des algorithmes d’optimisation globale.

4.2 Méthodes d'optimisation globale

Les méthodes d'imagerie sismique par inversion des formes d'ondes complètes (FWI) ou par tomographie des temps de premières arrivées sont basées sur des méthodes d'optimisations locales linéarisées qui utilisent les propriétés locales de la fonction coût pour chercher la direction de descente (voir Menke (1984); Tarantola (1987); Brossier (2009) pour la théorie complète). Ces méthodes fonctionnent bien pour trouver un minimum local dans le voisinage proche de la solution de départ. Les méthodes d'optimisation globale cherchent le minimum global de la fonction coût sur l'ensemble du domaine en évitant ainsi la convergence dans un minimum local. Ces méthodes consistent à explorer l'ensemble de l'espace des modèles (paramètres inversés) limité seulement par des valeurs minimales et maximales, pour trouver la fonction coût minimale. Les méthodes d'optimisation globale peuvent être classées de la façon suivante :

- recherche sur grille (grid search) : exploration exhaustive des modèles avec un pas cartésien donné. Cette méthode fonctionne bien pour les modèles simples avec peu de paramètres, sinon, elle a un coût de calcul prohibitif.
- méthodes Monte-Carlo (ou explorations globales) introduites par Metropolis & Ulam (1949) : explorations aléatoires du milieu. Comme pour les méthodes de grid search, les méthodes Monte-Carlo fonctionnent bien avec un modèle direct simple et rapide à calculer sinon, le coût de calcul est prohibitif.
- méthodes Monte Carlo orientées (ou explorations semi-globales) : ces méthodes sont fondées sur des explorations aléatoires des modèles mais dirigées vers les meilleurs modèles afin de réduire le coût de calcul. Il y a trois principales méthodes avec des variantes :
 - Recuit simulé (Simulated Annealing, SA) introduit par Rothman (1985, 1986) en géophysique. Cette méthode repose sur une analogie physique avec le refroidissement lent d'un métal dans un fluide. Les particules se réarrangent selon un état de moindre énergie (fonction coût) si la température décroît à la vitesse optimale.
 - Algorithmes génétiques (GA) ont été appliqués aux problèmes géophysiques par Stoffa & Sen (1991). Ils sont basés sur une analogie avec l'évolution biologique.
 - Algorithme de voisinage (Neighbourhood algorithm, NA). Introduit par Sambridge (1999a,b), l'avantage de cette méthode par rapport aux méthodes SA et GA est qu'elle nécessite seulement deux paramètres de contrôle.

Les ouvrages de van Laarhoven & Aarts (1987) pour le recuit simulé, de Michalewicz (1994) pour les algorithmes génétiques et de Sen & Stoffa (1995) offrent une vision détaillée de ces méthodes d'optimisation globale stochastiques.

Le problème inverse, qui vise à extraire des données (attributs sismiques déduits des sismogrammes) les modèles (paramètres poroélastiques), est formulé de manière générale de la façon suivante :

$$\vec{d} = g(\vec{m}) , \quad (4.1)$$

où \vec{d} est le vecteur données, \vec{m} le vecteur modèles et g est une fonction non linéaire reliant modèles et données. Dans notre approche, cette fonction g regroupe les relations analytiques de Biot-Gassmann (équations définies dans le chapitre 1), permettant de calculer les vitesses et atténuations des ondes P, S et Biot (équations 1.9, 1.12 et 1.14) ainsi que la masse volumique moyenne (équation 1.30) en fonction des paramètres décrivant le milieu poreux à l'échelle

microscopique. Cette fonction est non linéaire et l'inverse de g n'est pas calculable. La résolution du système $\vec{m} = g^{-1}(\vec{d})$ doit donc se faire par des méthodes d'optimisation. La linéarisation du système peut se faire par des méthodes de recherche locale qui nécessite d'avoir un modèle de départ a-priori proche du modèle vrai afin d'éviter les minima locaux. Cette méthode est la seule envisageable pour les problèmes qui ont un grand nombre d'inconnues et/ou un temps de calcul du problème direct important (par exemple, résolution d'équations différentielles pour la FWI). Dans notre cas, la modélisation directe est très rapide (calcul d'une dizaine de relations analytiques) et le nombre de paramètres/modèles est faible (entre 10 et 18 paramètres).

L'optimisation se résume à minimiser une fonction scalaire (nommée fonction misfit ou fonction coût) décrivant l'écart entre les données observées d_{obs} et les données calculées $g(\vec{m})$ par modélisation directe. On utilise une norme L_2 pour calculer ce misfit, soit :

$$misfit = \left[(\vec{d}_{obs} - g(\vec{m}))^T (\vec{d}_{obs} - g(\vec{m})) \right]^{1/2}. \quad (4.2)$$

Pour l'inversion, on utilise l'algorithme de voisinage de Sambridge (1999a). Le principe de l'algorithme consiste à subdiviser l'espace des modèles en cellules de Voronoï en focalisant le rééchantillonnage en fonction des valeurs de la fonction misfit les plus faibles. A chaque itération, de nouvelles cellules sont définies en fonction de la valeur du misfit de l'échantillon précédent. Le rééchantillonnage se concentre donc dans les zones de misfit faible comme décrit par la figure 4.2. L'algorithme se décompose en 4 étapes :

- 1) ns modèles sont générés aléatoirement (avec une probabilité uniforme) sur l'ensemble de l'espace des modèles,
- 2) le misfit de ces ns modèles est calculé et nr meilleurs modèles (de misfit le plus faible) sont choisis,
- 3) ns nouveaux modèles sont générés avec un pas aléatoire (déterminé par la méthode de l'échantillonneur de Gibbs) dans la cellule de Voronoï de chaque modèle nr ,
- 4) répétition des étapes 2 et 3 jusqu'au nombre d'itération maximal it_{max} .

Les deux paramètres ns et nr sont les deux seuls paramètres de contrôle de l'algorithme. Plus ns et nr sont grands, plus l'échantillonnage est large et donc la recherche exploratoire, plus ils sont faibles, plus l'optimisation est locale et donc efficace. Cependant, Sambridge (1999a) précise qu'il n'y a pas de règle quantitative pour déterminer les valeurs optimales de ns et nr , seuls des tests numériques cas-dépendants permettent de déterminer ces valeurs. Dans la pratique, quatre paramètres sont à définir pour le calcul d'optimisation. Les deux paramètres ns (nombre de modèles générés à chaque itération) et nr (nombre de cellules choisies pour le rééchantillonnage) ainsi que le nombre d'itération it_{max} et le nombre de modèles générés à la première itération n_{s0} , qui peut être différent de ns , et qui détermine l'échantillonnage initial. Dans la plupart des cas présentés dans ce chapitre, $ns = nr = 10$ et 1000 itérations sont calculées, ce qui fait que 10 000 modèles sont générés par inversion. Après cette étape d'échantillonnage, Sambridge (1999b) a proposé une étape d'estimation probabiliste de la résolution des modèles obtenus dans la première phase. Par la définition de fonctions de densité de probabilités, on peut ainsi quantifier les erreurs et la résolution obtenues par la première étape d'échantillonnage. Cette étape d'analyse bayésienne ne sera pas utilisée ici.

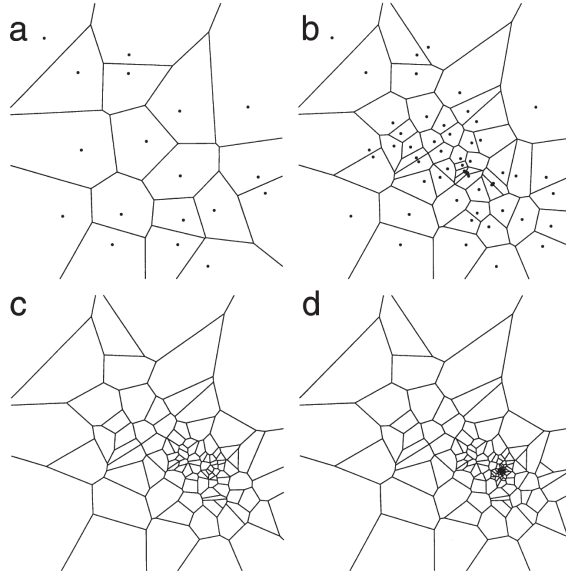


FIGURE 4.2 – Répartition des cellules de Voronoï après (a) 1, (b) 5, (c) 10 et (d) 20 itérations. A chaque itérations, 9 cellules sont rééchantillonnées. Le misfit est calculé au centre de chaque cellule (points noirs) et attribué à la cellule entière. Figure tirée de Sambridge & Kennett (2001).

4.3 Sensibilité des paramètres poroélastiques

Dans cette première partie, on détermine la sensibilité des paramètres poroélastiques suivant les données macro-échelles utilisées :

- vitesse de propagation de l'onde P uniquement : V_P ,
- vitesse de propagation des ondes P et S : V_P, V_S ,
- vitesse de propagation des ondes P et S et masse volumique moyenne : V_P, V_S, ρ ,
- vitesse et facteur de qualité (inverse de l'atténuation) de l'onde P et masse volumique moyenne : V_P, Q_P, ρ ,
- vitesses et facteurs de qualité des ondes P et S : V_P, Q_P, V_S, Q_S ,
- vitesses et facteurs de qualité des ondes P et S et masse volumique : V_P, Q_P, V_S, Q_S, ρ .

Dans les exemples présentés ici, on utilise le modèle de Biot-Gassmann (équations définies dans le chapitre 1) ou le modèle de Biot-Gassmann étendu à des milieux non saturés par moyennes (équations définies dans la partie 3.3.2 du chapitre 3). Différentes paramétrisations sont étudiées, pour les milieux saturés et non saturés :

- milieux saturés, inversion de tous les paramètres du modèle de Biot-Gassmann (à l'exception de la perméabilité qui a une sensibilité trop faible) : paramètres de la phase fluide (K_f, η et ρ_f), de la phase solide (K_s, G_s et ρ_s) et du squelette (m, cs et ϕ),
- milieux saturés, inversion des paramètres du squelette : porosité ϕ et paramètre de consolidation cs (les autres paramètres étant fixés),
- milieux saturés, inversion des paramètres de la phase fluide : module d'incompressibilité K_f , viscosité η et masse volumique ρ_f ,

- milieux non saturés, inversion de la saturation en eau V_1 et des paramètres du squelette (ϕ et cs).

4.3.1 Inversion de tous les paramètres en milieux saturés

On utilise les équations de Biot-Gassmann pour un milieu consolidé saturé en eau. Les paramètres micro-échelles décrivant le milieu et les paramètres macro-échelles calculés par les relations de Biot-Gassmann, sont donnés dans le tableau 4.1. Pour le premier test, on inverse “brutalement” tous les paramètres de la phase solide (K_s , G_s et ρ_s), de la phase fluide (K_f , η et ρ_f) et du squelette (m , cs et ϕ) à partir de V_P (figure 4.3), de V_P et V_S (figure 4.4), de V_P , V_S et ρ (figure 4.5), de V_P , Q_P et ρ (figure 4.6), de V_P , V_S , Q_P et Q_S (figure 4.7) et de V_P , V_S , Q_P , Q_S et ρ (figure 4.8).

Dans chaque figure, les graphiques de la première ligne représentent la valeur du paramètre obtenu pour chaque modèle calculé en fonction du nombre de modèle calculé. La couleur de chaque point (= chaque modèle) correspond à la valeur de misfit obtenue. Plus le nombre de modèles calculés est grand, plus on converge vers une ou plusieurs valeurs grâce à l’optimisation dirigée par le rééchantillonnage du milieu par cellules de Voronoï. Les graphiques de la deuxième ligne correspondent à des coupes 2D de l’espace des modèles, chaque modèle étant représenté par un code couleur dépendant de la valeur du misfit. On peut ainsi interpréter la forme de la fonction misfit pour les deux paramètres considérés.

Paramètres micro-échelles	K_s	(GPa)	40
	G_s	(GPa)	10
	ρ_s	(kg/m ³)	2700
	K_f	(GPa)	2.2
	ρ_f	(kg/m ³)	1000
	η	(Pa.s)	0.001
	m		1
	ϕ		0.4
	k_0	(m ²)	10 ⁻¹¹
	cs		5
Paramètres macro-échelles	V_P	(m/s)	2570
	V_S	(m/s)	862
	Q_P		1190
	Q_S		161
	ρ	(kg/m ³)	2010

TABLE 4.1 – Paramètres micro- et macro-échelles du modèle saturé. Les vitesses et les facteurs de qualité des ondes P et S sont calculés à 200 Hz.

Les paramètres de la phase fluide sont inversés avec plus ou moins de succès. Le module d’incompressibilité K_f est assez bien estimé malgré quelques minima locaux et ce, quelles que soit les données, probablement à cause de la relation de proportionnalité plus ou moins directe entre K_f et K_U et donc, avec les vitesses V_P et V_S . La masse volumique ρ_f est correctement estimée seulement si les données contiennent les atténuations (notamment Q_P). Quand on utilise seulement les vitesses et la masse volumique, il y a de nombreux minima locaux qui

empêchent d'estimer correctement ρ_f . La viscosité η n'est jamais évaluée correctement quelles que soit les données, probablement à cause de la faible sensibilité du paramètre et de la grande amplitude de valeurs envisageables pour η (7 ordres de grandeurs entre la viscosité d'un gaz et du pétrole par exemple).

Les paramètres de la phase solide (grains) présentent une sensibilité assez grande. Le module d'incompressibilité K_s est bien apprécié malgré la présence de quelques minima locaux, et une erreur plus importante quand on utilise les atténuations. Le module de cisaillement G_s est mal estimé avec les données des ondes P seulement (V_P , Q_P), ce qui paraît logique puisque l'on n'apporte aucune information sur le cisaillement dans ce cas-là. En revanche, on a une bonne estimation de G_s dès que l'on utilise les données de cisaillement. La fonction misfit de la masse volumique ρ_s présente de nombreux minima locaux, seule l'utilisation de V_P , V_S et ρ permet une appréciation correcte de ρ_s .

Les paramètres du squelette sont reliés plus directement aux paramètres macro-échelles. Le facteur de cimentation m est correctement estimé avec l'utilisation conjointe de V_P et V_S , mais des erreurs dues aux minima locaux apparaissent avec l'utilisation des atténuations. Le paramètre de consolidation cs est plus ou moins bien estimé (minima locaux) à part avec les données V_P seules et V_P , V_S et ρ . La porosité ϕ est assez bien appréciée quelles que soient les données avec cependant des minimas locaux.

L'inversion de tous les paramètres est donc possible quand on n'a aucune information sur le milieu. Cependant, certains paramètres seront mal estimés et surtout, l'évaluation correcte de tous les paramètres ne requiert pas forcément l'utilisation des mêmes données. Dans les cas plus classiques où on dispose de connaissances a-priori sur certains paramètres du milieu (notamment sur les grains et la phase fluide), on peut faire des inversions plus ciblées sur quelques paramètres.

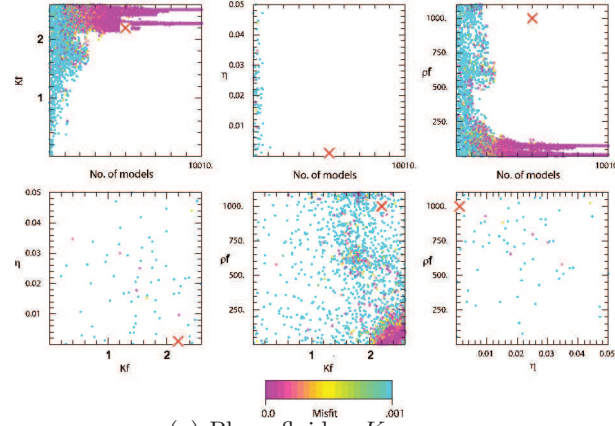
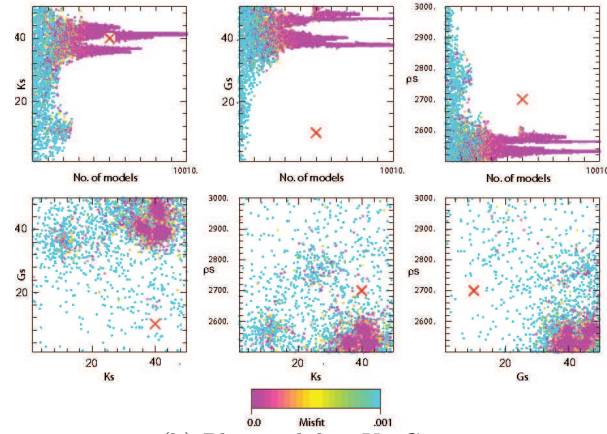
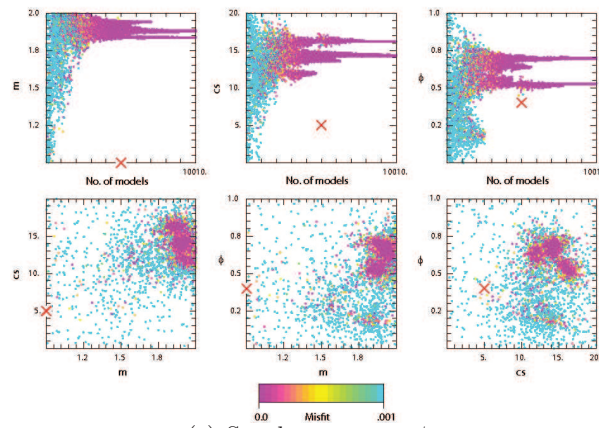

 (a) Phase fluide : K_f, η, ρ_f

 (b) Phase solide : K_s, G_s, ρ_s

 (c) Squelette : m, cs, ϕ

FIGURE 4.3 – Inversion des paramètres poroélastiques à partir des données V_p . (a) Paramètres de la phase fluide : K_f (en GPa), η (en $Pa.s$) et ρ_f (en kg/m^3), (b) Paramètres de la phase solide : K_s (en GPa), G_s (en GPa) et ρ_s (en kg/m^3), (c) Paramètres du squelette : m, cs et ϕ . Le modèle vrai est représenté par la croix rouge. Chaque graphique représente les valeurs des modèles calculés dans l'espace des paramètres (ou en fonction du nombre de modèles calculés et donc, du nombre d'itérations). La couleur des points dépend de la valeur de misfit obtenue pour le modèle considéré.

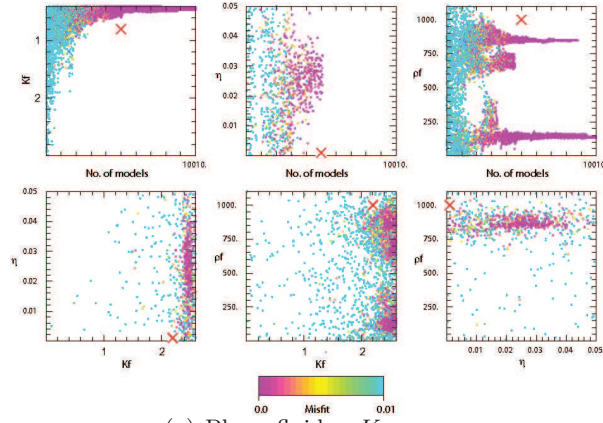
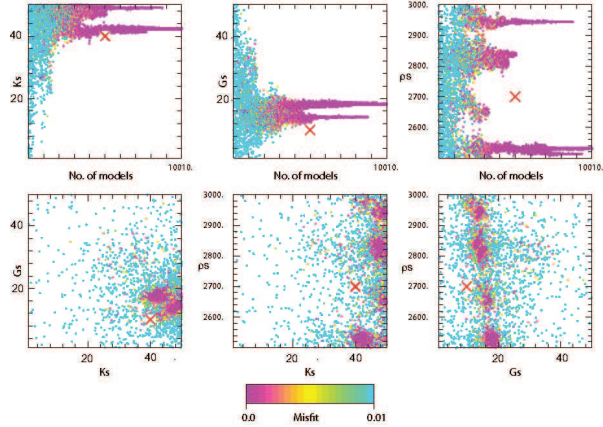
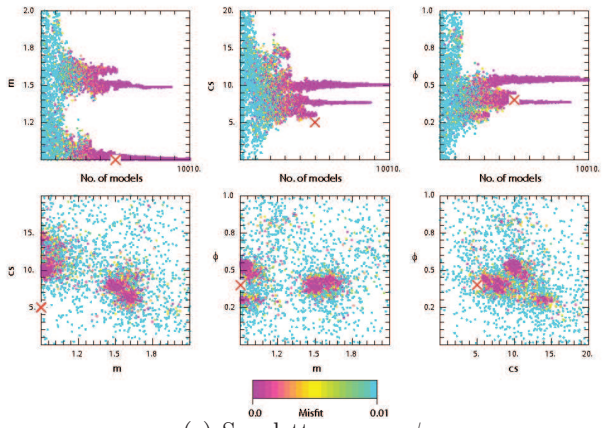

 (a) Phase fluide : K_f, η, ρ_f

 (b) Phase solide : K_s, G_s, ρ_s

 (c) Squelette : m, cs, ϕ

FIGURE 4.4 – Inversion des paramètres poroélastiques à partir des données V_P et V_S . (a) Paramètres de la phase fluide : K_f (en GPa), η (en $Pa.s$) et ρ_f (en kg/m^3), (b) Paramètres de la phase solide : K_s (en GPa), G_s (en GPa) et ρ_s (en kg/m^3), (c) Paramètres du squelette : m , cs et ϕ . Le modèle vrai est représenté par la croix rouge. Chaque graphique représente les valeurs des modèles calculés dans l'espace des paramètres (ou en fonction du nombre de modèles calculés et donc, du nombre d'itérations). La couleur des points dépend de la valeur de misfit obtenue pour le modèle considéré.

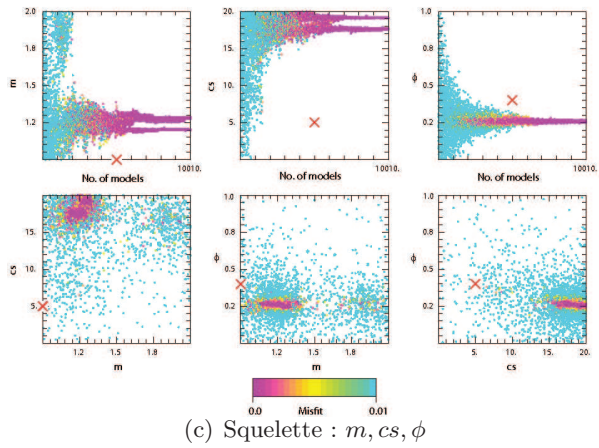
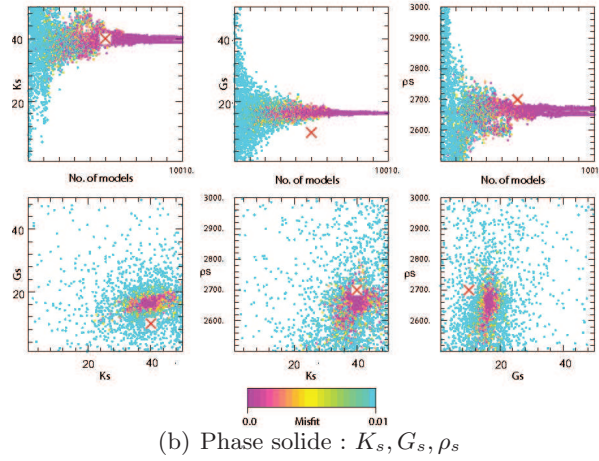
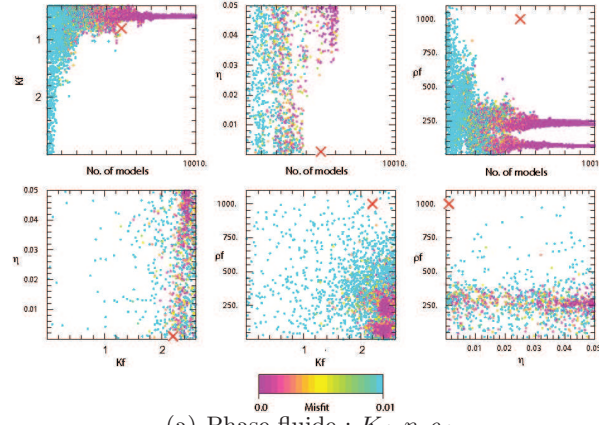


FIGURE 4.5 – Inversion des paramètres poroélastiques à partir des données V_P , V_S et ρ . (a) Paramètres de la phase fluide : K_f (en GPa), η (en $Pa.s$) et ρ_f (en kg/m^3), (b) Paramètres de la phase solide : K_s (en GPa), G_s (en GPa) et ρ_s (en kg/m^3), (c) Paramètres du squelette : m , cs et ϕ . Le modèle vrai est représenté par la croix rouge. Chaque graphique représente les valeurs des modèles calculés dans l'espace des paramètres (ou en fonction du nombre de modèles calculés et donc, du nombre d'itérations). La couleur des points dépend de la valeur de misfit obtenue pour le modèle considéré.

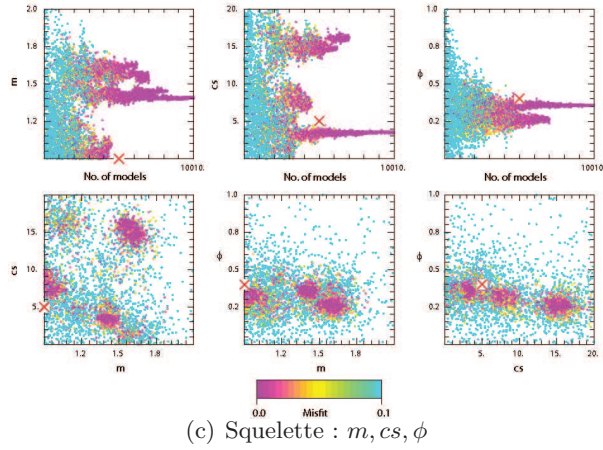
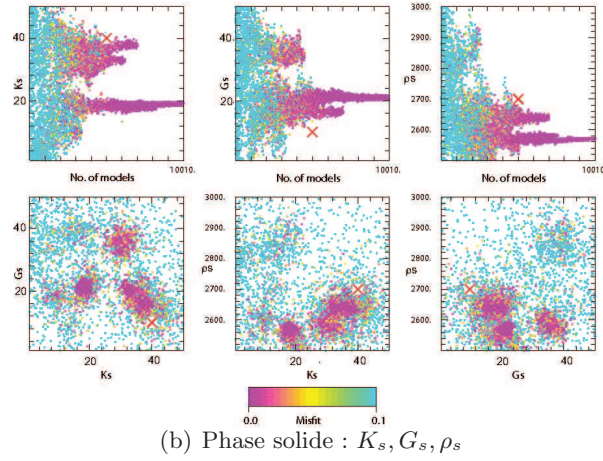
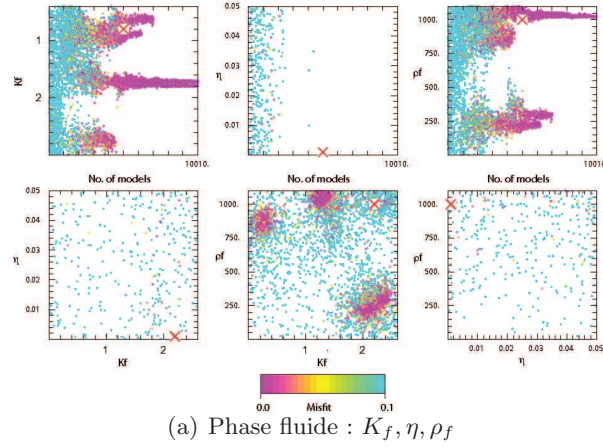


FIGURE 4.6 – Inversion des paramètres poroélastiques à partir des données V_P , Q_P et ρ . (a) Paramètres de la phase fluide : K_f (en GPa), η (en $Pa.s$) et ρ_f (en kg/m^3), (b) Paramètres de la phase solide : K_s (en GPa), G_s (en GPa) et ρ_s (en kg/m^3), (c) Paramètres du squelette : m , cs et ϕ . Le modèle vrai est représenté par la croix rouge. Chaque graphique représente les valeurs des modèles calculés dans l'espace des paramètres (ou en fonction du nombre de modèles calculés et donc, du nombre d'itérations). La couleur des points dépend de la valeur de misfit obtenue pour le modèle considéré.

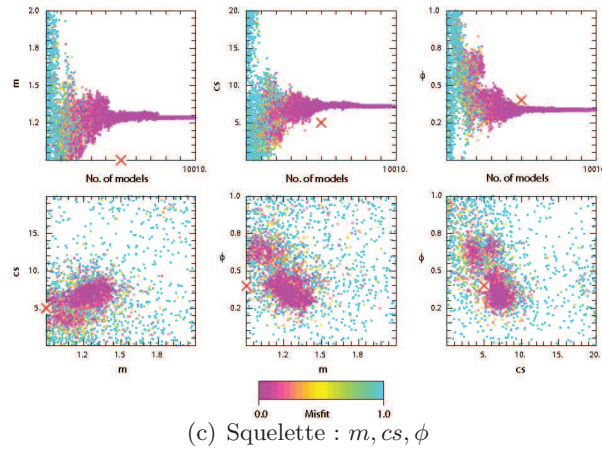
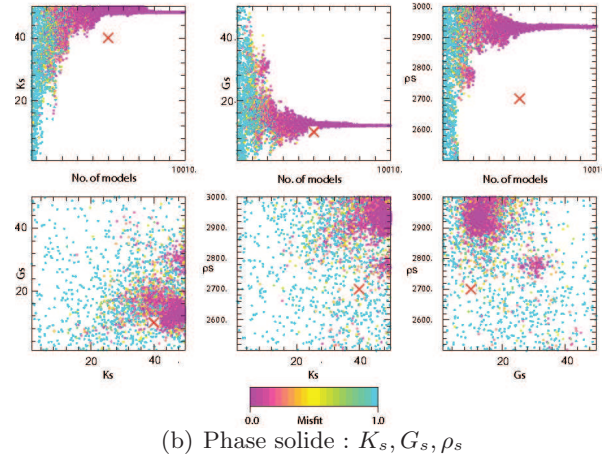
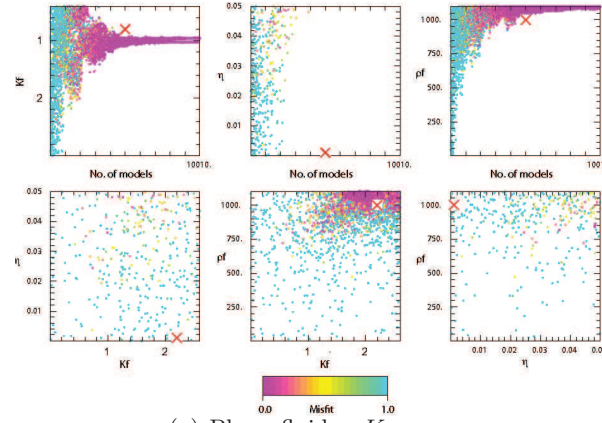


FIGURE 4.7 – Inversion des paramètres poroélastiques à partir des données V_P , V_S , Q_P et Q_S . (a) Paramètres de la phase fluide : K_f (en GPa), η (en $Pa.s$) et ρ_f (en kg/m^3), (b) Paramètres de la phase solide : K_s (en GPa), G_s (en GPa) et ρ_s (en kg/m^3), (c) Paramètres du squelette : m , cs et ϕ . Le modèle vrai est représenté par la croix rouge. Chaque graphique représente les valeurs des modèles calculés dans l'espace des paramètres (ou en fonction du nombre de modèles calculés et donc, du nombre d'itérations). La couleur des points dépend de la valeur de misfit obtenue pour le modèle considéré.

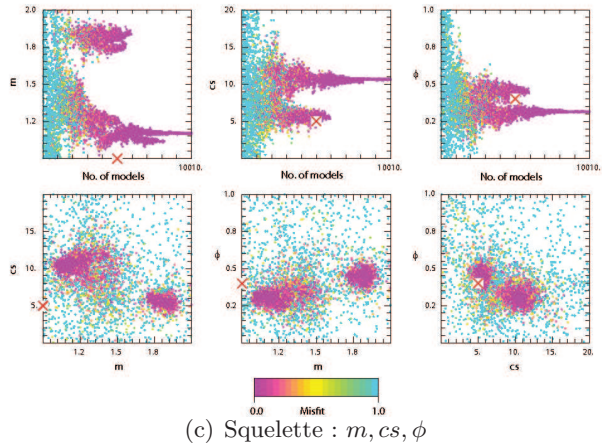
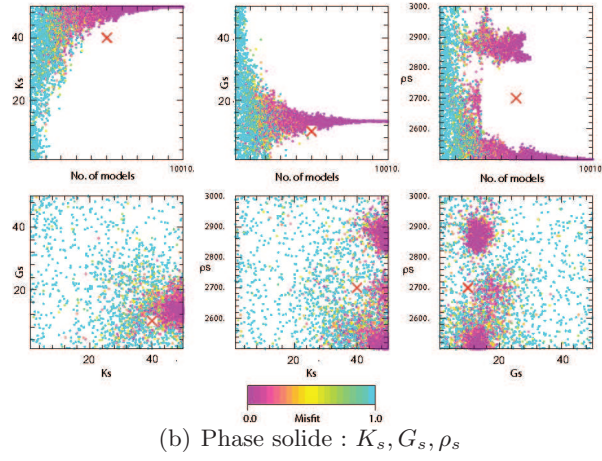
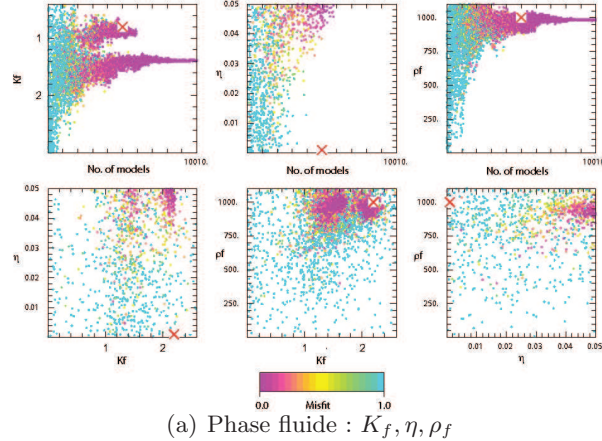


FIGURE 4.8 – Inversion des paramètres poroélastiques à partir des données V_P, V_S, Q_P, Q_S et ρ . (a) Paramètres de la phase fluide : K_f (en GPa), η (en $Pa.s$) et ρ_f (en kg/m^3), (b) Paramètres de la phase solide : K_s (en GPa), G_s (en GPa) et ρ_s (en kg/m^3), (c) Paramètres du squelette : m, cs et ϕ . Le modèle vrai est représenté par la croix rouge. Chaque graphique représente les valeurs des modèles calculés dans l'espace des paramètres (ou en fonction du nombre de modèles calculés et donc, du nombre d'itérations). La couleur des points dépend de la valeur de misfit obtenue pour le modèle considéré.

4.3.2 Inversion des paramètres du squelette en milieux saturés

Dans ce deuxième test, on suppose que les paramètres de la phase fluide et des grains sont connus a-priori (voir tableau 4.1) et on inverse uniquement la porosité ϕ et le paramètre de consolidation cs (figure 4.9). Quand on utilise uniquement V_P , la fonction misfit conjointe de ϕ et cs est centrée sur le modèle vrai (un seul minimum) mais l'ensemble des modèles avec un misfit faible est assez large. Plus on injecte des données, plus on réduit cet espace des modèles, jusqu'à avoir une forme de fonction misfit très encaissée. Les valeurs estimées à la fin des itérations sont regroupées dans le tableau 4.2 avec l'écart par rapport aux valeurs vraies.

À part quand les données sont uniquement constituées de V_P , on a une très bonne estimation de ϕ et cs avec moins de 0.2 % d'erreur. Quand on inverse à partir de V_P uniquement, l'erreur est beaucoup plus forte (50 %), ce qui s'explique par la forme aplatie de la fonction misfit et par le fait que l'on inverse deux paramètres à partir d'une seule donnée : on a ainsi du mal à discriminer une valeur correcte dans l'espace des modèles de faible misfit. L'estimation de ϕ et cs est donc correcte quelles que soient les données (à part avec seulement V_P), si on connaît les autres paramètres du milieu. Cependant, si une erreur est faite sur l'estimation d'un paramètre, l'inversion est biaisée et l'erreur entre valeurs estimées et valeurs vraies augmente (voir tableau 4.2). L'estimation de ϕ et cs est encore assez bonnes quand on dispose de trois types de données au minimum, on obtient alors moins de 7% d'erreur.

		ϕ	Erreur sur ϕ (%)	cs	Erreur sur cs (%)
Données	Valeurs exactes	0.4		5	
V_P	Paramètres fixés	0.596	49	2.26	55
	$K_f = -5\%$	0.35	12.5	6.06	21
	$K_s = -5\%$	0.251	37	10.1	102
V_P, V_S	Paramètres fixés	0.40012	0.03	4.9978	0.044
	$K_f = -5\%$	0.362	9.5	5.746	15
	$K_s = -5\%$	0.316	21	6.879	38
V_P, V_S, ρ	Paramètres fixés	0.39999	0.0025	5.0003	0.006
	$K_f = -5\%$	0.399	0.25	4.982	0.36
	$K_s = -5\%$	0.398	0.5	4.957	0.86
V_P, Q_P, ρ	Paramètres fixés	0.3998	0.05	5.0079	0.16
	$K_f = -5\%$	0.388	3	5.338	6.8
	$K_s = -5\%$	0.397	0.75	4.769	4.6
V_P, V_S, Q_P, Q_S	Paramètres fixés	0.39997	0.0075	5.0079	0.158
	$K_f = -5\%$	0.385	3.75	5.34	6.8
	$K_s = -5\%$	0.406	1.5	4.763	4.7
V_P, V_S, Q_P, Q_S, ρ	Paramètres fixés	0.39977	0.058	5.00775	0.155
	$K_f = -5\%$	0.388	3	5.335	6.7
	$K_s = -5\%$	0.405	1.25	4.765	4.7

TABLE 4.2 – Pourcentages d'erreurs entre les valeurs vraies et les valeurs estimées pour la porosité ϕ et le paramètre de consolidation cs . Les erreurs sont calculées pour l'inversion avec un modèle a-priori exact (paramètres fixés) et pour un modèle a-priori en partie erroné (-5% d'erreur sur K_f ou K_s) quelles que soient les données.

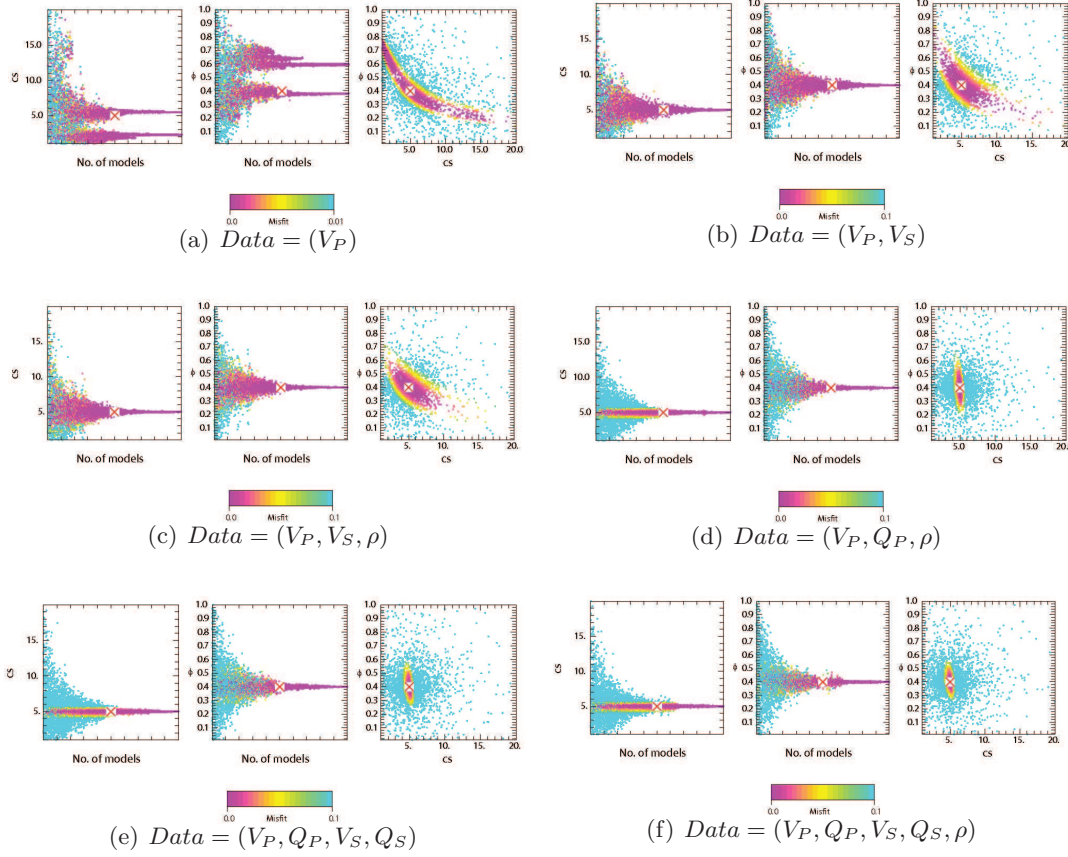


FIGURE 4.9 – Inversion des paramètres du squelette (porosité ϕ et paramètre de consolidation cs) à partir des données (a) V_P , (b) V_P, V_S , (c) V_P, V_S, ρ , (d) V_P, Q_P, ρ , (e) V_P, Q_P, V_S, Q_S et (f) V_P, Q_P, V_S, Q_S, ρ . Le modèle vrai est représenté par la croix rouge. Chaque graphique représente les valeurs des modèles calculés dans l'espace des paramètres (ou en fonction du nombre de modèles calculés et donc, du nombre d'itérations). La couleur des points dépend de la valeur de misfit obtenue pour le modèle considéré.

4.3.3 Inversion du type de fluide saturant (milieux saturés)

Dans le cas de réservoirs (gaz, pétrole, eau) ou de stockage (CO_2), il est souvent intéressant de connaître quel est le fluide saturant dans une formation rocheuse connue et de suivre son évolution au cours du temps (par exemple, lors de pompages ou d'injections). Par exemple, lors d'injection de vapeur d'eau à haute température dans un réservoir pétrolier, les extensions respectives de pétrole, de pétrole chauffé et de vapeur d'eau dans la couche géologique peuvent être déterminées par inversion des données macro-échelles pour retrouver les paramètres du fluide : K_f , η et ρ_f . On considère ici la formation de sables consolidés utilisée dans la partie 2.1.7 du chapitre 2 et on essaie de déterminer quel fluide sature la couche réservoir. Les paramètres du milieu sont donnés dans le tableau 4.3.

Les figures 4.10 et 4.11 pour le pétrole chauffé, les figures 4.12 et 4.13 pour le pétrole et les figures 4.14 et 4.15 pour la vapeur d'eau, présentent les fonctions misfit obtenues à partir des données (V_P) , (V_P, V_S) , (V_P, V_S, ρ) , (V_P, Q_P, ρ) , (V_P, Q_P, V_S, Q_S) , $(V_P, Q_P, V_S, Q_S, \rho)$. On ob-

tient des résultats similaires pour le pétrole chauffé et le pétrole mais une résolution beaucoup plus faible pour la vapeur d'eau. Les différences d'ordres de grandeurs des paramètres (3 ordres de magnitudes entre pétroles et vapeur d'eau pour K_f , 2 ordres pour ρ_f , 7 ordres pour η) expliquent probablement cette moins bonne estimation pour la vapeur d'eau. Le module d'incompressibilité K_f est correctement estimé avec les vitesses mais l'introduction des atténuations pose problème. On a un comportement similaire pour ρ_f où l'utilisation des données de masse volumique moyenne ρ améliore l'estimation. La viscosité η est mal appréciée, l'introduction des atténuations l'améliorant un peu.

Paramètres micro-échelles	K_s (GPa)	37		
	G_s (GPa)	4.4		
	ρ_s (kg/m ³)	2650		
	m	1.5		
	ϕ	0.33		
	k_0 (m ²)	10^{-12}		
	cs	20		
		Pétrole	Pétrole chauffé	Vapeur d'eau
	K_f (GPa)	1.7	1.2	$1.4 \cdot 10^{-3}$
	ρ_f (kg/m ³)	985	900	10
Paramètres macro-échelles	η (Pa.s)	150	0.3	$2.2 \cdot 10^{-5}$
	V_P (m/s)	1900	1769	1428
	V_S (m/s)	359	361	390
	Q_P	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
	Q_S	$2.6 \cdot 10^9$	$6.1 \cdot 10^6$	$3.1 \cdot 10^6$
	ρ (kg/m ³)	2100.55	2072.5	1778.8

TABLE 4.3 – Paramètres micro- et macro-échelles du modèle de Daï. Les vitesses et les facteurs de qualité des ondes P et S sont calculés à 20 Hz.

Ainsi, même si certains paramètres du fluide sont difficilement inversibles (viscosité), on peut tout de même déterminer le type de fluide en se basant sur les informations obtenues par l'inversion de K_f et ρ_f à partir des vitesses V_P et V_S et de la masse volumique ρ , pour déterminer la nature du fluide saturant. Ceci est encourageant si l'on considère les méthodes de FWI qui permettent de retrouver ces paramètres macro-échelles avec une approche élastique.

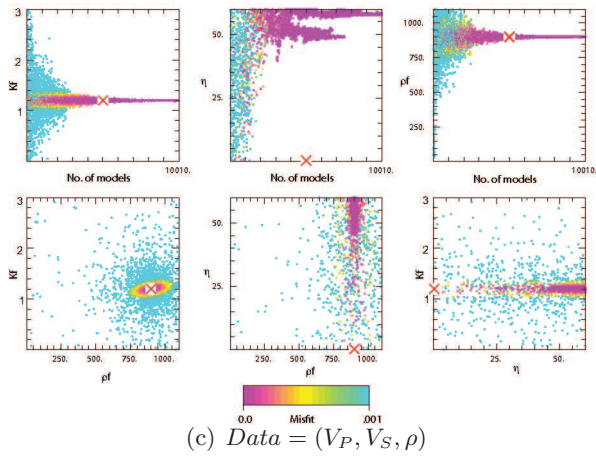
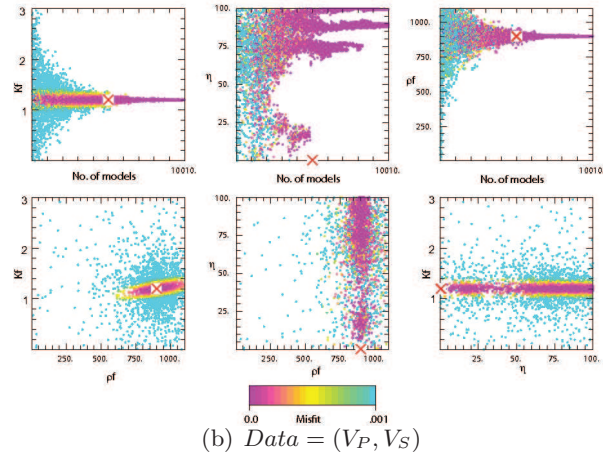
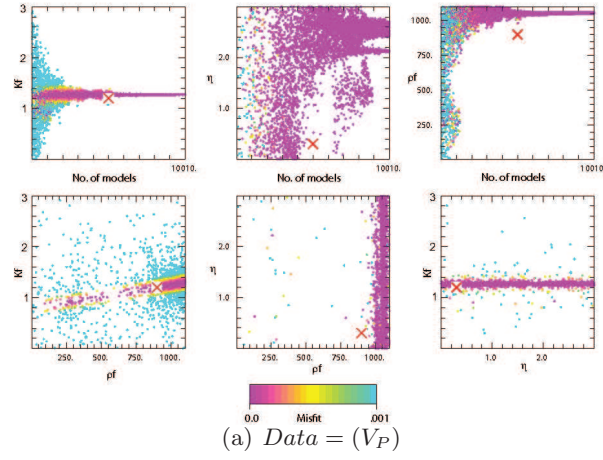


FIGURE 4.10 – Inversion des paramètres de la phase fluide : module d'incompressibilité K_f (en GPa), viscosité η (en $Pa.s$) et masse volumique ρ_f (en kg/m^3) à partir des données (a) V_P , (b) V_P, V_S , (c) V_P, V_S, ρ . Le modèle vrai est représenté par la croix rouge. Le fluide saturant est du pétrole chauffé. Chaque graphique représente les valeurs des modèles calculés dans l'espace des paramètres (ou en fonction du nombre de modèles calculés et donc, du nombre d'itérations). La couleur des points dépend de la valeur de misfit obtenue pour le modèle considéré.

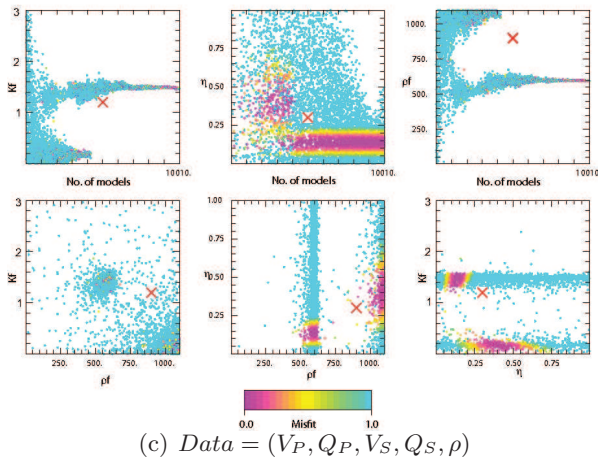
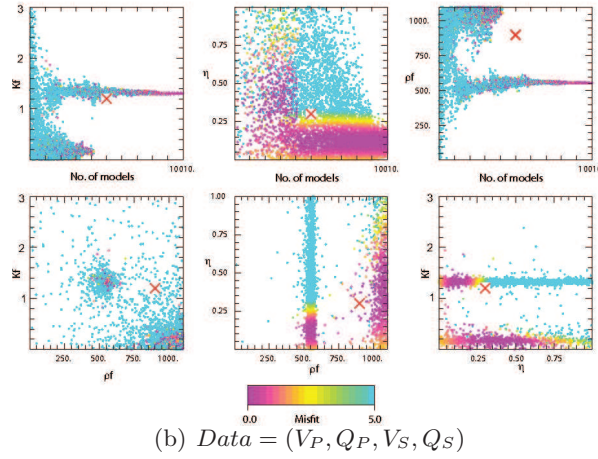
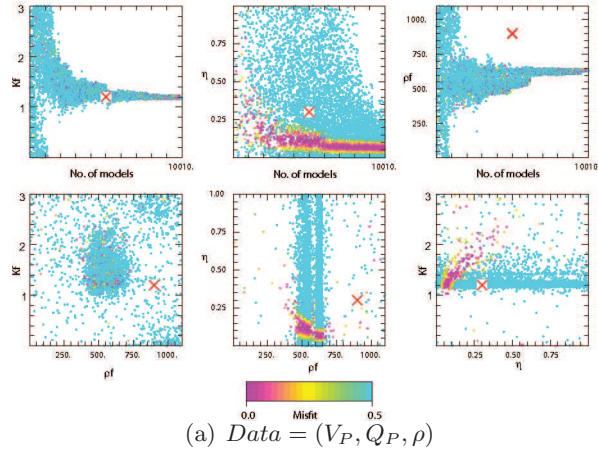


FIGURE 4.11 – Inversion des paramètres de la phase fluide : module d’incompressibilité K_f (en GPa), viscosité η (en $Pa.s$) et masse volumique ρ_f (en kg/m^3) à partir des données (a) V_P, Q_P, ρ , (b) V_P, Q_P, V_S, Q_S , (c) V_P, Q_P, V_S, Q_S, ρ . Le modèle vrai est représenté par la croix rouge. Le fluide saturant est du pétrole chauffé. Chaque graphique représente les valeurs des modèles calculés dans l’espace des paramètres (ou en fonction du nombre de modèles calculés et donc, du nombre d’itérations). La couleur des points dépend de la valeur de misfit obtenue pour le modèle considéré.

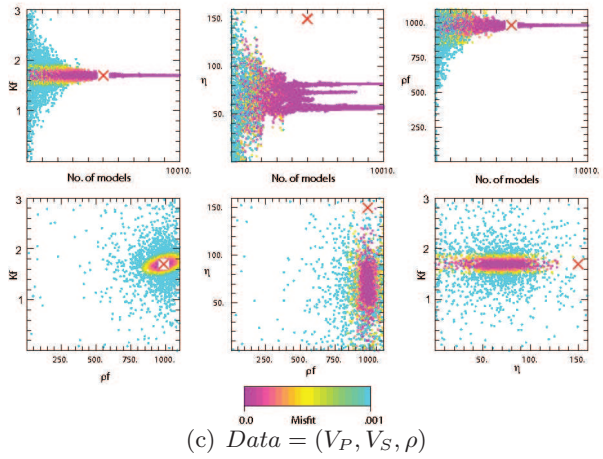
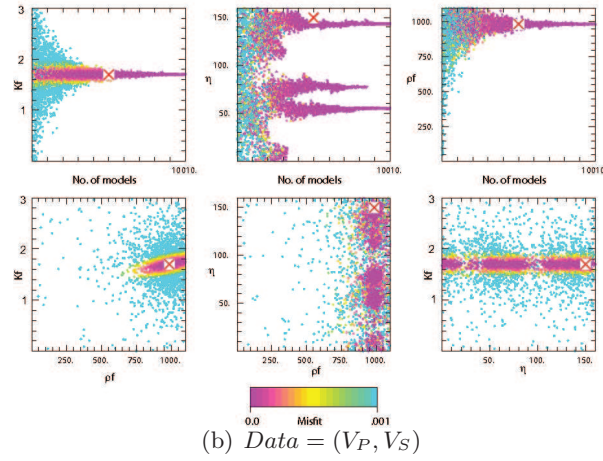
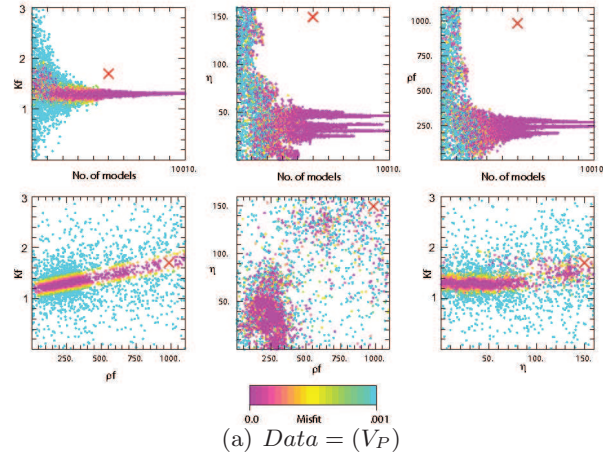


FIGURE 4.12 – Inversion des paramètres de la phase fluide : module d'incompressibilité K_f (en GPa), viscosité η (en $Pa.s$) et masse volumique ρ_f (en kg/m^3) à partir des données (a) V_P , (b) V_P, V_S , (c) V_P, V_S, ρ . Le modèle vrai est représenté par la croix rouge. Le fluide saturant est du pétrole. Chaque graphique représente les valeurs des modèles calculés dans l'espace des paramètres (ou en fonction du nombre de modèles calculés et donc, du nombre d'itérations). La couleur des points dépend de la valeur de misfit obtenue pour le modèle considéré.

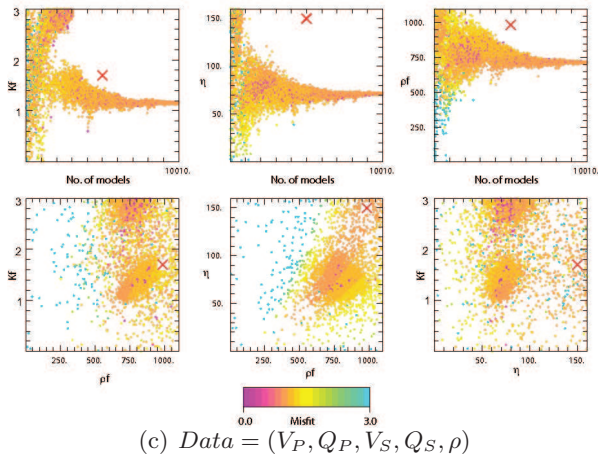
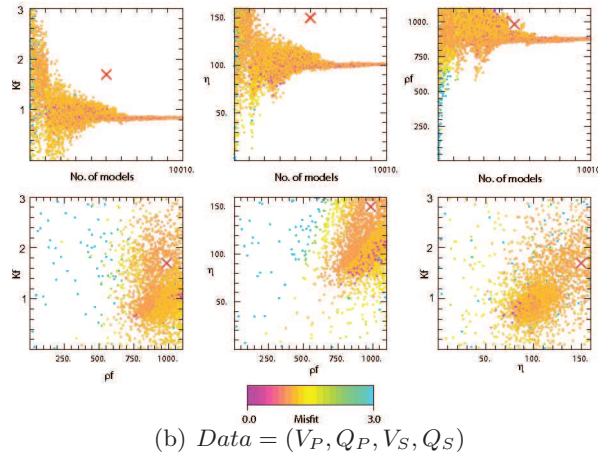
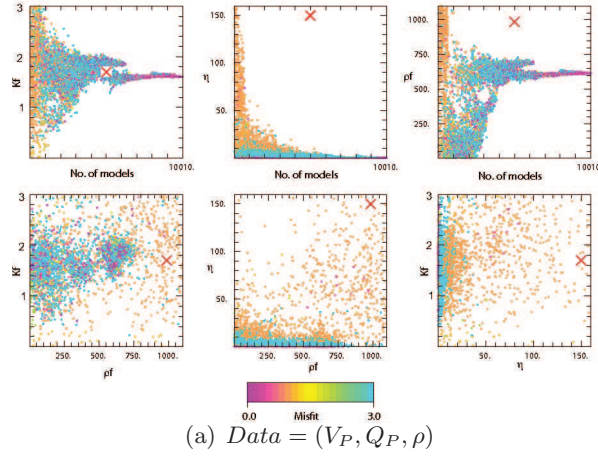


FIGURE 4.13 – Inversion des paramètres de la phase fluide : module d'incompressibilité K_f (en GPa), viscosité η (en $Pa.s$) et masse volumique ρ_f (en kg/m^3) à partir des données (a) V_P, Q_P, ρ , (b) V_P, Q_P, V_S, Q_S , (c) V_P, Q_P, V_S, Q_S, ρ . Le modèle vrai est représenté par la croix rouge. Le fluide saturant est du pétrole. Chaque graphique représente les valeurs des modèles calculés dans l'espace des paramètres (ou en fonction du nombre de modèles calculés et donc, du nombre d'itérations). La couleur des points dépend de la valeur de misfit obtenue pour le modèle considéré.

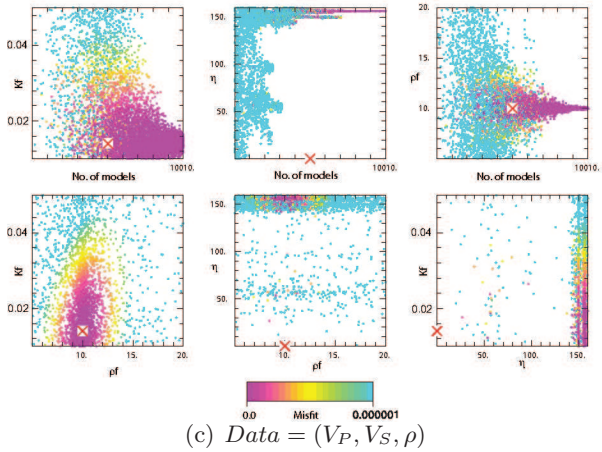
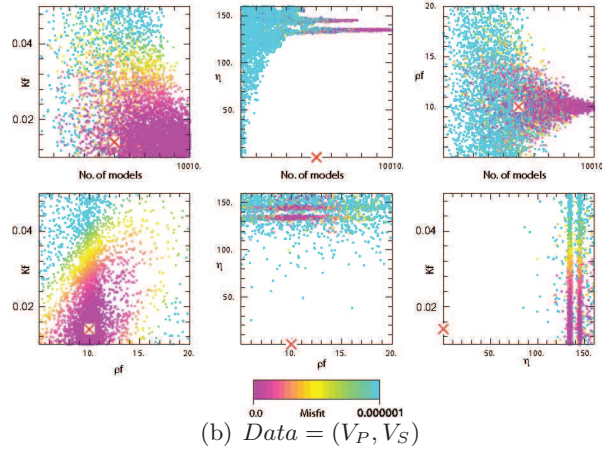
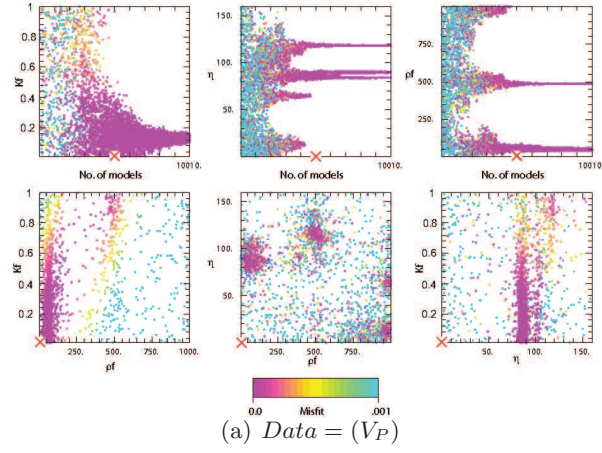


FIGURE 4.14 – Inversion des paramètres de la phase fluide : module d'incompressibilité K_f (en GPa), viscosité η (en $Pa.s$) et masse volumique ρ_f (en kg/m^3) à partir des données (a) V_P , (b) V_P, V_S , (c) V_P, V_S, ρ . Le modèle vrai est représenté par la croix rouge. Le fluide saturant est de la vapeur. Chaque graphique représente les valeurs des modèles calculés dans l'espace des paramètres (ou en fonction du nombre de modèles calculés et donc, du nombre d'itérations). La couleur des points dépend de la valeur de misfit obtenue pour le modèle considéré.

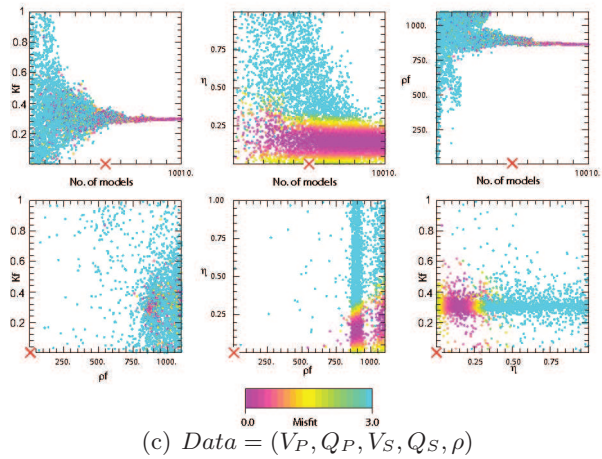
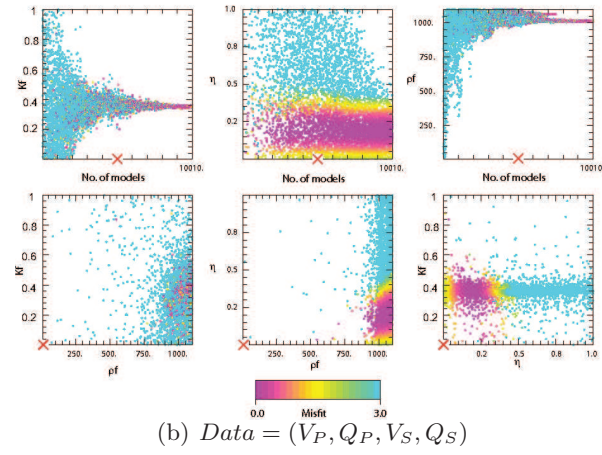
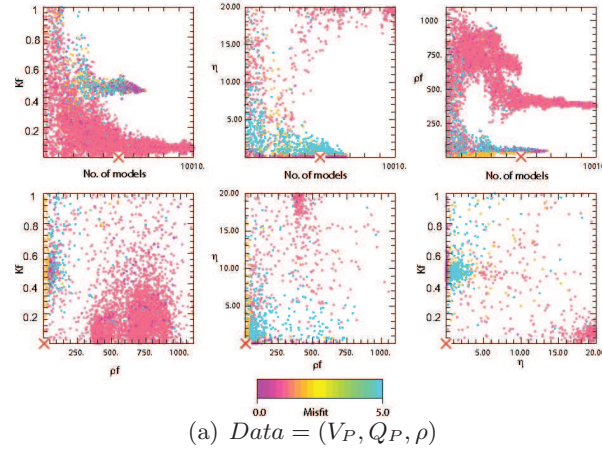


FIGURE 4.15 – Inversion des paramètres de la phase fluide : module d'incompressibilité K_f (en GPa), viscosité η (en $Pa.s$) et masse volumique ρ_f (en kg/m^3) à partir des données (a) V_P, Q_P, ρ , (b) V_P, Q_P, V_S, Q_S , (c) V_P, Q_P, V_S, Q_S, ρ . Le modèle vrai est représenté par la croix rouge. Le fluide saturant est de la vapeur. Chaque graphique représente les valeurs des modèles calculés dans l'espace des paramètres (ou en fonction du nombre de modèles calculés et donc, du nombre d'itérations). La couleur des points dépend de la valeur de misfit obtenue pour le modèle considéré.

4.3.4 Inversion de la saturation et des paramètres du squelette (milieux non saturés)

Dans ce dernier test synthétique, on utilise un modèle de Biot-Gassmann en incluant une phase fluide non saturée calculée par moyennes simples (équations 3.8, 3.9 et 3.10 de la partie 3.3.2 du chapitre 3). La formation géologique est constituée de sables peu consolidés partiellement saturés en eau et en air. Les valeurs des paramètres sont données dans le tableau 4.4. On inverse conjointement les paramètres du squelette ϕ et cs et la saturation en eau V_1 .

Paramètres micro-échelles	K_s	(GPa)	40
	G_s	(GPa)	10
	ρ_s	(kg/m ³)	2700
	V_1		0.4
	K_f (eau)	(GPa)	2.2
	K_f (air)	(GPa)	$1.5 \cdot 10^{-4}$
	K_f (effectif)	(GPa)	0.0227
	ρ_f (eau)	(kg/m ³)	1000
	ρ_f (air)	(kg/m ³)	1.2
	ρ_f (effectif)	(kg/m ³)	400.72
	η (eau)	(Pa.s)	0.001
	η (air)	(Pa.s)	$1.8 \cdot 10^{-5}$
	η (effectif)	(Pa.s)	$2 \cdot 10^{-4}$
	m		1
	ϕ		0.4
	k_0	(m ²)	10^{-11}
	cs		5
Paramètres macro-échelles	V_P	(m/s)	2377
	V_S	(m/s)	919
	Q_P		85
	Q_S		82
	ρ	(kg/m ³)	1780

TABLE 4.4 – Paramètres micro- et macro- échelles du modèle non saturé. Les vitesses et les facteurs de qualité des ondes P et S sont calculés à 200 Hz.

Les résultats sont présentés dans la figure 4.16 pour les données (V_P) , (V_P, V_S) et (V_P, V_S, ρ) et dans la figure 4.17 pour les données (V_P, Q_P, ρ) , (V_P, Q_P, V_S, Q_S) et $(V_P, Q_P, V_S, Q_S, \rho)$. Les fonctions misfit pour ϕ , cs et V_1 présentent des minima locaux quand on utilise peu de paramètres (uniquement les vitesses et la masse volumique) et la convergence vers le bon modèle est donc faible (voir tableau 4.5 : entre 10 et 30 % d'erreur pour ϕ et cs et plus de 25 à 100 % d'erreur sur V_1). Etonnament, l'estimation de ϕ et cs à partir de seulement V_P est bonne avec respectivement 4 et 8 % d'erreur par rapport au modèle vrai. On peut penser que l'explication vient du fait que V_P est principalement sensible à V_1 et ϕ alors que les autres paramètres macro-échelles sont sensibles à d'autres paramètres poroélastiques et donc, en utilisant uniquement V_P comme données, on concentre l'optimisation sur ϕ et V_1 sans introduire d'artefacts. Quand le modèle a-priori est biaisé, les erreurs d'estimation sont

beaucoup plus grandes si on possède uniquement les données de vitesses et de masse volumique. Cependant, l'utilisation des atténuations (figure 4.17), et notamment de Q_P , est déterminante pour réduire l'espace des modèles corrects, l'inversion de ϕ , cs et V_1 converge alors vers les valeurs vraies avec une très bonne résolution (voir tableau 4.5, moins de 0.6 % d'erreurs) même quand le modèle a-priori est erroné (25 % d'erreur sur V_1 et respectivement 5 et 13 % d'erreur sur ϕ et cs pour des données (V_P, Q_P, ρ) ; moins de 4 % d'erreur avec l'introduction de Q_S).

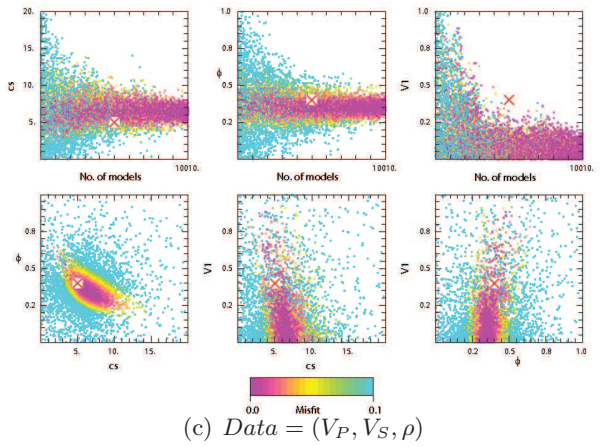
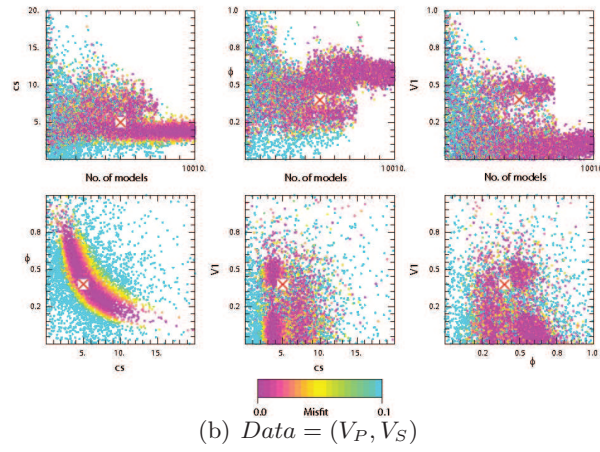
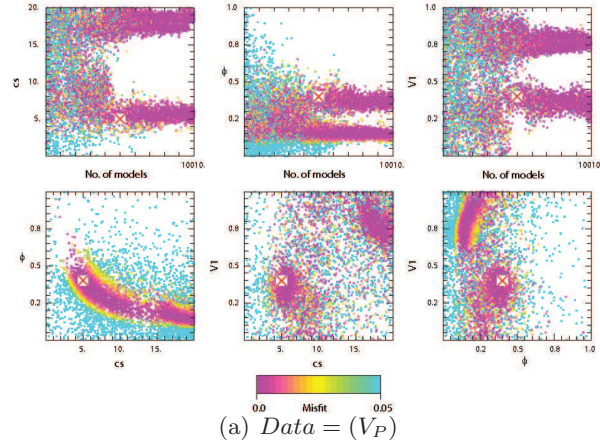


FIGURE 4.16 – Inversion des paramètres du squelette : porosité ϕ et consolidation cs et de la saturation en eau V_1 à partir des données (a) V_P , (b) V_P, V_S , (c) V_P, V_S, ρ . Le modèle vrai est représenté par la croix rouge. Chaque graphique représente les valeurs des modèles calculés dans l'espace des paramètres (ou en fonction du nombre de modèles calculés et donc, du nombre d'itérations). La couleur des points dépend de la valeur de misfit obtenue pour le modèle considéré.

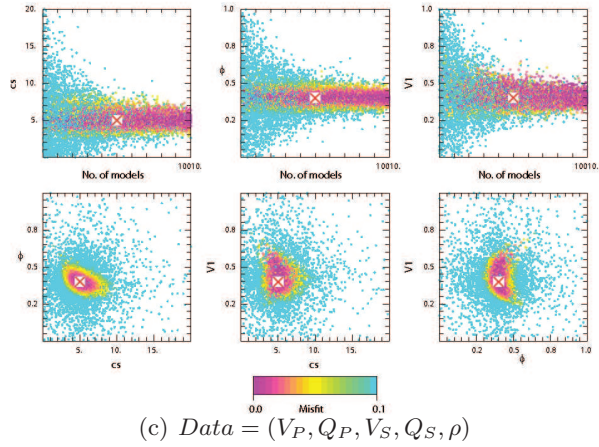
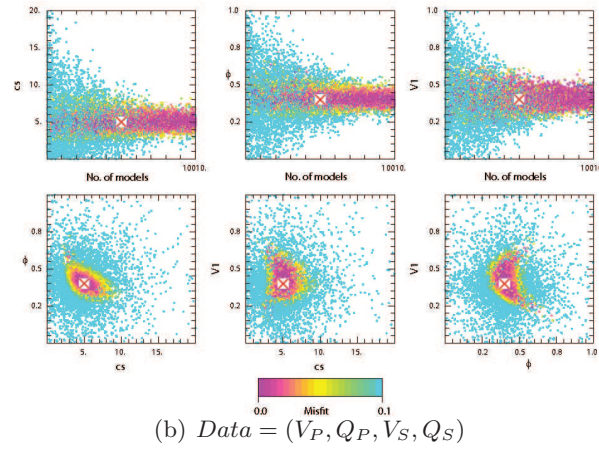
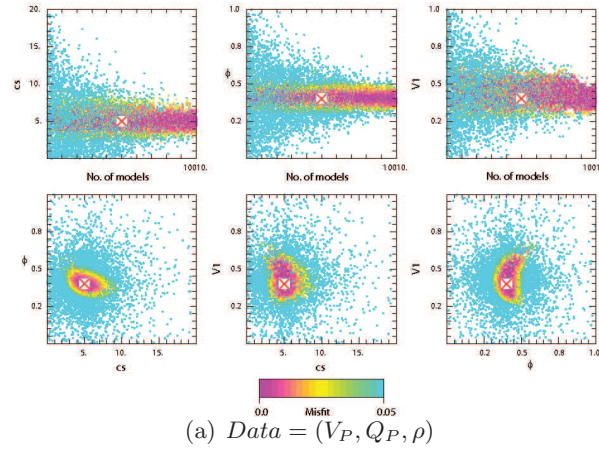


FIGURE 4.17 – Inversion des paramètres du squelette : porosité ϕ et consolidation cs et de la saturation en eau V_1 à partir des données (a) V_P, Q_P, ρ , (b) V_P, Q_P, V_S, Q_S , (c) V_P, Q_P, V_S, Q_S, ρ . Le modèle vrai est représenté par la croix rouge. Chaque graphique représente les valeurs des modèles calculés dans l'espace des paramètres (ou en fonction du nombre de modèles calculés et donc, du nombre d'itérations). La couleur des points dépend de la valeur de misfit obtenue pour le modèle considéré.

Données	Valeurs exactes	ϕ	$\Delta\phi/\phi$ (%)	cs	$\Delta cs/cs$ (%)	V_1	$\Delta V_1/V_1$ (%)
	Valeurs exactes	0.4		5		0.4	
V_P	Paramètres fixés	0.384	4	5.4	8	0.293	26.75
	$K_s = -5\%$	0.113	72	18.85	277	0.204	49
V_P, V_S	Paramètres fixés	0.538	34.5	3.916	22	0.125	69
	$K_s = -5\%$	0.164	59	13.04	161	0.599	50
V_P, V_S, ρ	Paramètres fixés	0.352	12	6.275	25.5	0.0084	98
	$K_s = -5\%$	0.341	14.75	6.42	28	0.0089	98
V_P, Q_P, ρ	Paramètres fixés	0.40057	0.14	4.97	0.6	0.398	0.5
	$K_s = -5\%$	0.419	4.75	4.33	13	0.50	25
V_P, V_S, Q_P, Q_S	Paramètres fixés	0.40016	0.04	4.99	0.2	0.3996	0.1
	$K_s = -5\%$	0.402	0.5	4.82	3.6	0.394	1.5
V_P, V_S, Q_P, Q_S, ρ	Paramètres fixés	0.40042	0.11	4.978	0.44	0.402	0.5
	$K_s = -5\%$	0.399	0.25	4.88	2.4	0.402	0.5

TABLE 4.5 – Pourcentages d'erreurs ($\Delta x/x$) entre les valeurs vraies et les valeurs estimées pour la porosité ϕ , le paramètre de consolidation cs et la saturation en eau V_1 . Les erreurs sont calculées pour l'inversion avec un modèle a-priori exact (paramètres fixés) et pour un modèle a-priori en partie erroné (-5% d'erreur sur K_f ou K_s) quelles que soient les données.

4.3.5 Conclusion sur la sensibilité des paramètres poroélastiques

Le tableau 4.6 résume les sensibilités à l'inversion des paramètres en fonction des données utilisées. L'inversion simultanée de tous les paramètres est difficile et les résultats obtenus sont variables suivant les paramètres et les données. En revanche, quand on inverse uniquement les paramètres du squelette et la saturation en fluide, l'estimation des paramètres inversés est très bonne et augmente quand on introduit plus de données, notamment l'atténuation des ondes P. L'inversion des paramètres du fluide fonctionne aussi assez bien mais les résultats sont biaisés par la très faible sensibilité de la viscosité. On peut envisager de déterminer dans un premier temps le type de fluide afin de fixer la viscosité avant d'inverser uniquement K_f et ρ_f pour avoir des valeurs précises. Pour résoudre les ambiguïtés sur la viscosité (qui sont également présentes sur la perméabilité, non montrée ici), au lieu d'inverser η , on pourrait estimer $\log(\eta)$ afin de mieux discriminer les nombreux ordres de magnitude.

On pourrait également tester d'autres configurations de paramètres à inverser suivant les cas considérés et d'autres configurations de données, en ajoutant par exemple des données issues d'interprétations AVO. D'autre part, des approches couplées prenant en compte des données électriques ou électromagnétiques (GPR, CSEM par exemple) peuvent être envisagées pour mieux contraindre certains paramètres du milieu poreux qui ont une influence significative sur les ondes sismiques, les ondes électromagnétiques et les phénomènes électriques. D'autre part, si les dispositifs de mesures de potentiels électriques se développent, on peut envisager l'utilisation des ondes de Biot en champ proche qui peuvent apporter des informations importantes sur la perméabilité et la viscosité du fluide.

Paramètres	Données	(V_P)	(V_P, V_S)	(V_P, V_S, ρ)	(V_P, Q_P, ρ)	(V_P, Q_P, V_S, Q_S)	$(V_P, Q_P, V_S, Q_S, \rho)$
Tous	K_f	+	+	+	+	+	+
	η	-	-	-	-	-	-
	ρ_f	-	-	-	+	+	+
	K_s	+	+	+	+	+	+
	G_s	-	+	+	+	+	+
	ρ_s	-	-	+	+	-	-
	m	-	+	-	+	+	+
	cs	-	+	-	+	+	+
	ϕ	-	+	-	+	+	+
Squelette	cs	-	+	+	++	++	++
	ϕ	-	+	+	++	++	++
Fluide	K_f	++	++	++	+	+	+
	η	-	-	-	-	-	-
	ρ_f	+	++	++	-	-	-
Squelette et saturation	cs	+	-	-	+	++	++
	ϕ	+	-	-	++	++	++
	V_1	-	-	-	+	++	++

TABLE 4.6 – Tableau récapitulatif des tests de sensibilité. Symbolisme : - : pas de convergence, - : nombreux minima locaux, pas de convergence vers le bon résultat, + : bonne estimation du résultat parmi plusieurs minima, résolution moyenne, forte sensibilité au modèle a-priori, ++ estimation parfaite, très bonne résolution, robuste par rapport au modèle a-priori. Pour l'estimation des paramètres du fluide, dans le cas de la vapeur d'eau, la résolution est systématiquement plus faible que celle donnée dans ce tableau pour le pétrole et le pétrole chauffé.

4.4 Applications synthétiques

Après avoir étudié les sensibilités des paramètres poroélastiques à l'inversion par optimisation globale, on va appliquer ce type de downscaling à des cas réalistes où l'on peut obtenir des images de vitesses du sous-sol. On va étudier deux exemples : le premier reprend le modèle de réservoir étudié dans la partie 2.1.7 du chapitre 2. Le second concerne une application hydrogéophysique de subsurface, où des formations sableuses sont partiellement saturées en eau.

La démarche des tests sera la suivante :

- calcul de données synthétiques poroélastiques pour un ensemble de source et de récepteurs,
- inversion des paramètres macro-échelles à partir des sismogrammes par FWI (partie 4.4.1) ou par tomographie des temps d'arrivées (partie 4.4.2),
- downcaling des paramètres poroélastiques par optimisation globale.

4.4.1 Monitoring de réservoir

4.4.1.1 Description du modèle

Cet exemple est basé sur une application réaliste de réservoir pétrolier dans lequel on injecte de la vapeur d'eau pour améliorer la production. Ce cas est basé sur les travaux de Dai *et al.* (1995) et a été utilisé dans la partie 2.1.7 du chapitre 2. Huit couches de sables de plus en plus consolidées avec la profondeur sont définies par leurs paramètres poroélastiques micro-échelles (voir tableau 4.7). La phase fluide saturant le milieu poreux est constituée d'eau, sauf pour la couche réservoir (couche numéro 6) saturée en pétrole avant l'injection. Au cours de l'injection de vapeur d'eau, deux demi-cercles concentriques se forment autour du point d'injection (toit de la couche réservoir) où le milieu poreux se sature en vapeur d'eau et en pétrole chauffé. Ces changements de propriétés du fluide affectent les paramètres macro-échelles (vitesses et atténuations) donnés dans le tableau 4.7.

La figure 4.18 résume les valeurs des paramètres micro-échelles pour le modèle de base avec la répartition géométrique des valeurs de K_s , G_s , ρ_s , K_f , η , ρ_f , ϕ et k_0 . Les valeurs des paramètres des grains (K_s , G_s et ρ_s) augmentent avec la profondeur, tout comme les valeurs des paramètres du squelette (ϕ et k_0), à part dans la couche réservoir qui a une forte porosité et une forte perméabilité. Les paramètres cs et m sont constants. En effet, dans la définition du modèle de Dai *et al.* (1995), la compaction du milieu est portée par les paramètres des grains K_S et G_S (qui s'apparentent plus à K_D et G_D). Les paramètres du fluide sont constants dans toutes les couches (eau), excepté dans la sixième, saturée en pétrole.

La figure 4.19 montre les valeurs des paramètres de la phase fluide après injection, où on voit bien les demi-cercles concentriques des phases de vapeur d'eau et de pétrole chauffé dans la couche réservoir. Les paramètres macro-échelles associés sont donnés par la figure 4.20 pour le modèle de base et par la figure 4.21 pour le modèle après injection. De façon générale, V_P , V_S et ρ augmentent avec la profondeur (en relation avec la porosité et la compacité du milieu), excepté dans la couche réservoir de forte porosité qui a des valeurs de vitesses et de masse volumique inférieures aux couches encaissantes (toit et base du réservoir). Les atténuations sont assez faibles à part dans les couches de subsurface. Le changement de phase fluide dans la

couche réservoir a une influence importante uniquement sur les valeurs de V_P et ρ (figure 4.21) et pas sur les atténuations ; c'est donc un cas peu "sensible".

La propagation d'ondes est calculée dans ce milieu par le code Galerkin discontinu (chapitre 2) pour obtenir des données poroélastiques et par un code différences finies en temps (Levander, 1988) pour avoir des données acoustiques. A partir de ces données (figure 4.22), une étape d'inversion des formes d'ondes complètes dans le domaine temporel (Mora, 1987, 1989) fournit une estimation des paramètres macro-échelles dans le milieu. La configuration des sources et des récepteurs est la suivante :

- 22 sources espacées de 25 m sur une ligne horizontale à 75 m de profondeur,
- 45 récepteurs sur la même ligne horizontale que les sources et 45 récepteurs dans chaque puits verticaux. Les récepteurs sont espacés de 12.5 m .

Les données acoustiques sont calculées pour une source (fonction Ricker) centrée sur 20 Hz et on inverse jusqu'à 65 Hz en domaine temporel (Asnaashari *et al.*, 2011). Pour des raisons de coût numérique, l'inversion élastique est réalisée à plus basse fréquence : la source est un Ricker de fréquence centrale égale à 9 Hz et on inverse neuf fréquences entre 5 et 20 Hz pour l'inversion élastique des données poroélastiques.

Les sismogrammes obtenus pour une source centrée sur la ligne horizontale du dispositif pour des simulations acoustiques et poroélastiques sont donnés par la figure 4.22 avant et après injection. On voit que les données poroélastiques sont beaucoup plus complexes avec de nombreuses converties PS notamment au niveau de la couche réservoir qui présente un fort contraste de vitesse des ondes S. Cependant les ondes P réfléchies les plus énergétiques (toit de la couche réservoir et substratum) se retrouvent sur chaque sismogramme. Les amplitudes des ondes réfléchies et converties par la couche réservoir sont différentes avant et après injection (pour plus de détail, voir Asnaashari *et al.* (2011)).

Les récepteurs placés dans les forages verticaux permettent de compléter le spectre des nombres d'ondes en améliorant l'illumination. On suppose également que l'on possède des données dans les puits où sont placés les récepteurs et on utilise un modèle a-priori pour mieux contraindre l'inversion FWI. Dans un premier temps, on cherche à reconstruire le modèle de base le plus précisément possible pour pouvoir détecter ensuite les changements dus à l'injection.

	Couches de sable								Vapeur d'eau	Pétrole chauffé
	1	2	3	4	5	6	7	8		
K_s (GPa)	5.2	5.3	5.8	7.5	6.9	37	9.4	26	37	37
G_s (GPa)	2.4	2.9	3.3	4.2	3.6	4.4	5.6	17	4.4	4.4
ρ_s (kg/m^3)	2250	2300	2400	2490	2211	2650	2670	2700	2650	2650
K_f (GPa)	2.5	2.5	2.5	2.5	2.5	1.7	2.5	2.5	0.0014	1.2
ρ_f (kg/m^3)	1040	1040	1040	1040	1040	985	1040	1040	10	900
η ($Pa.s$)	0.001	0.001	0.001	0.001	0.001	150	0.001	0.001	$2.2 \cdot 10^{-5}$	0.3
m	1.5	1.5	1.5	1.5	1.5	1.5	1.5	1.5	1.5	1.5
ϕ	0.25	0.1	0.05	0.03	0.01	0.33	0.02	0.05	0.33	0.33
k_0 (m^2)	10^{-12}	10^{-13}	10^{-13}	10^{-13}	10^{-16}	10^{-12}	10^{-13}	10^{-14}	10^{-12}	10^{-12}
cs	20	20	20	20	20	20	20	20	20	20
f_c (kHz)	19	48	17	8	1530	$4.6 \cdot 10^6$	4.3	171	66	10^4
Régime de l'onde de Biot	Diffusif									
V_P (m/s)	1505	1613	1749	2019	2179	1900	2265	3281	1428	1768
V_S (m/s)	330	548	733	936	1116	359	1140	1571	390	361
V_{Biot} (m/s)	7.8	4.2	6.2	8.8	0.4	0.03	11.7	3.5	3.5	0.6
Q_P	948	413	$+\infty$	1054	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
Q_S $\cdot 10^3$	14.33	160	172	180	$1.62 \cdot 10^5$	$2.58 \cdot 10^6$	194	1925	3114	6108
Q_{Biot}	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5
ρ (kg/m^3)	1948	2174	2332	2445	2200	2100	2637	2617	1779	2073

TABLE 4.7 – Paramètres micro et macro-échelles du modèle de réservoir (d'après Dai *et al.* (1995)). Les vitesses et les facteurs de qualité des ondes P, S et Biot (V_P , V_S , V_{Biot} , Q_P , Q_S et Q_{Biot}) sont calculés pour la fréquence centrale de la source (20 Hz).

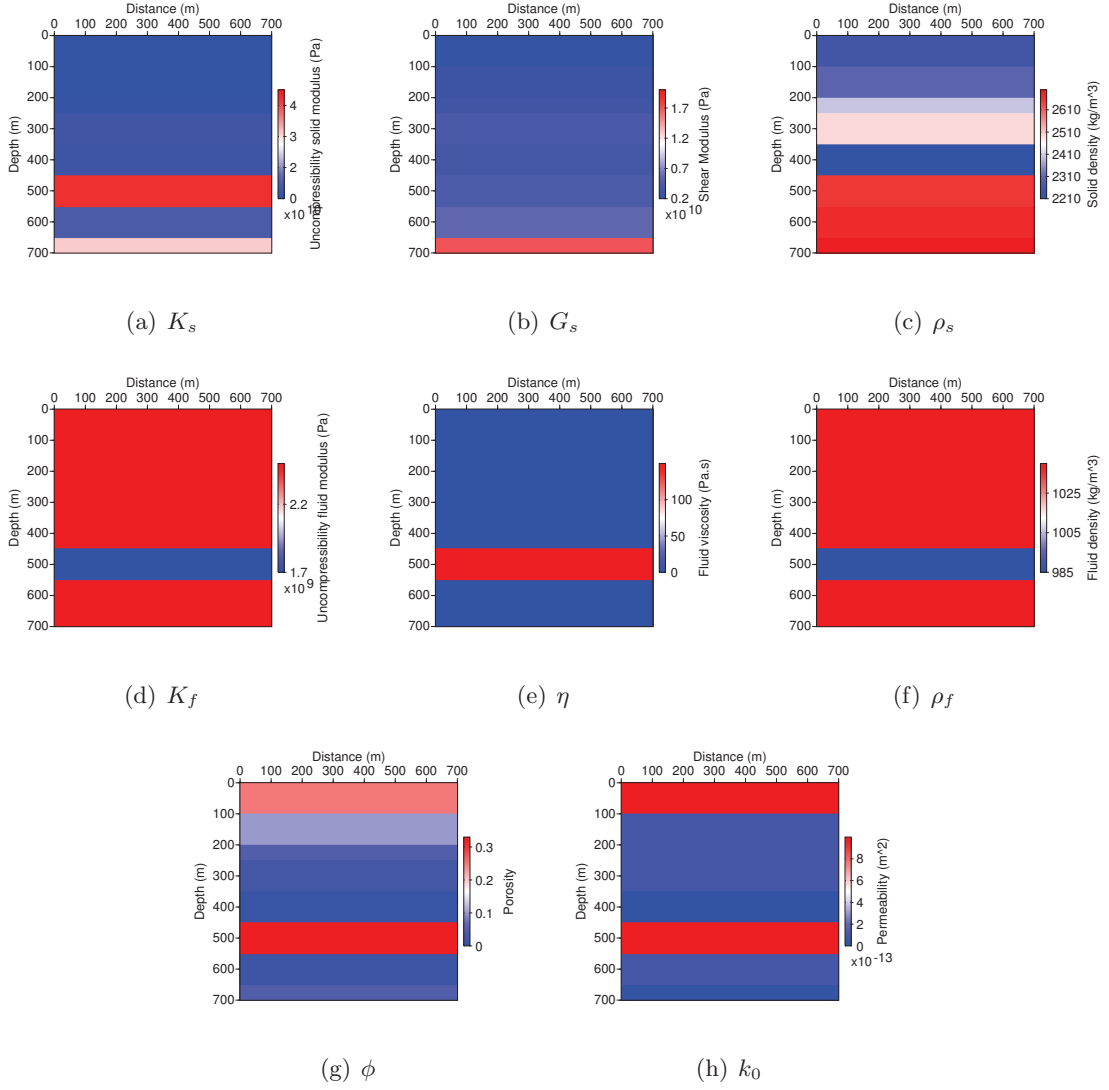


FIGURE 4.18 – Valeurs des paramètres poroélastiques micro-échelles pour le modèle de base (avant injection) : (a) K_s , (b) G_s , (c) ρ_s , (d) K_f , (e) η , (f) ρ_f , (g) ϕ , (h) k_0 . Les valeurs exactes sont données dans le tableau 4.7. Les paramètres cs et m sont constants.

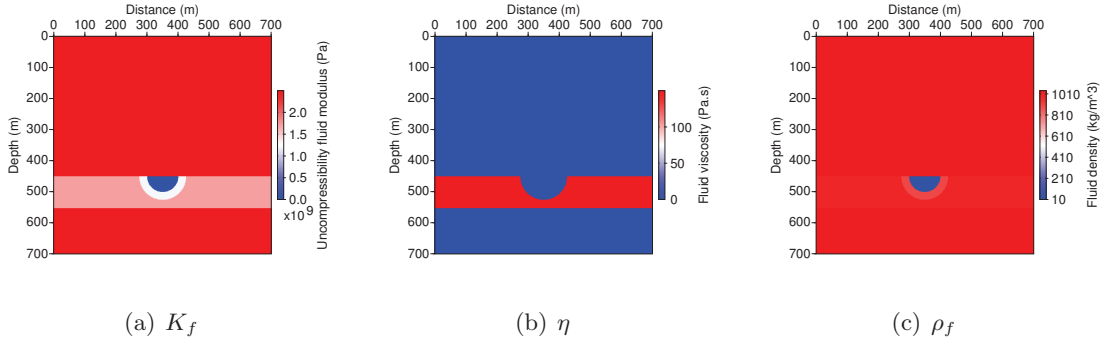


FIGURE 4.19 – Valeurs des paramètres poroélastiques micro-échelles pour le modèle après injection : (a) K_f , (b) η , (c) ρ_f . Les valeurs exactes sont données dans le tableau 4.7. Les autres paramètres (grains, squelette) ont des valeurs identiques au modèle de base (figure 4.18).

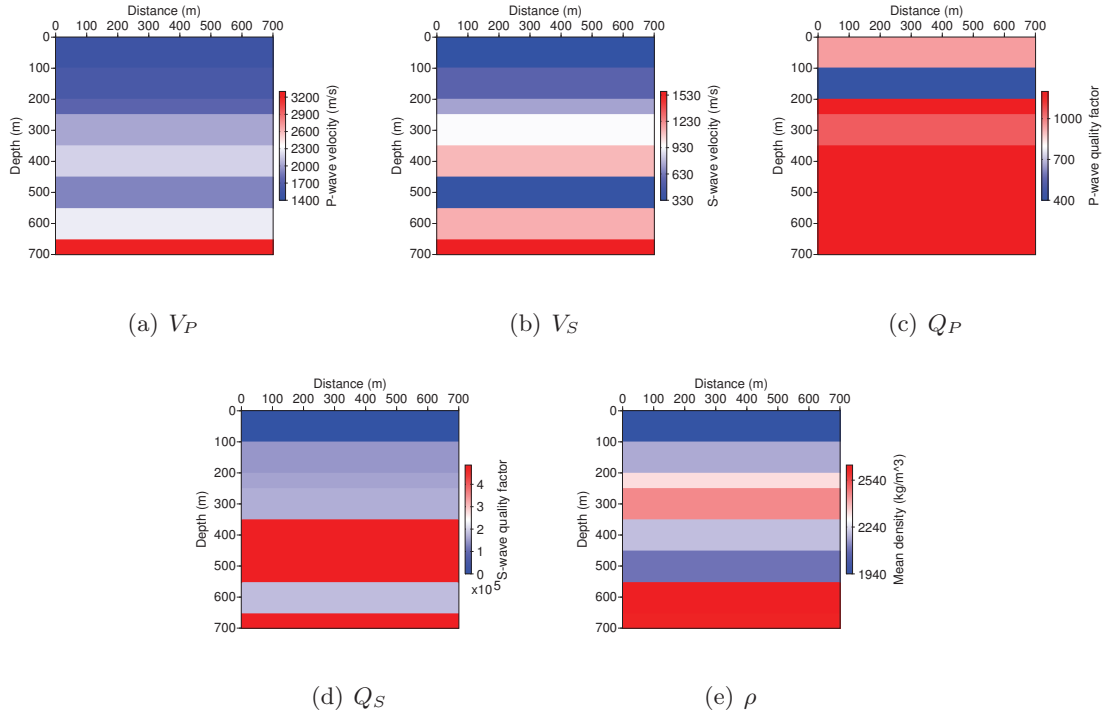


FIGURE 4.20 – Valeurs des paramètres visco-élastiques macro-échelles pour le modèle de base (avant injection) : (a) V_P , (b) V_S , (c) Q_P , (d) Q_S , (e) ρ . Les valeurs exactes sont données dans le tableau 4.7. Les valeurs de Q_P et Q_S supérieures à, respectivement, 1200 et 500000, ne sont pas différenciées.

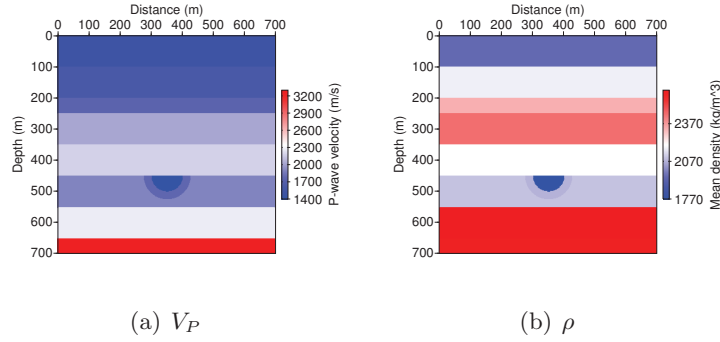


FIGURE 4.21 – Valeurs des paramètres visco-élastiques macro-échelles pour le modèle monitor (après injection) : (a) V_P , (b) ρ . Les valeurs exactes sont données dans le tableau 4.7. Les autres paramètres (V_S , Q_P et Q_S) ont des valeurs sensiblement égales à celles du modèle de base (figure 4.20).

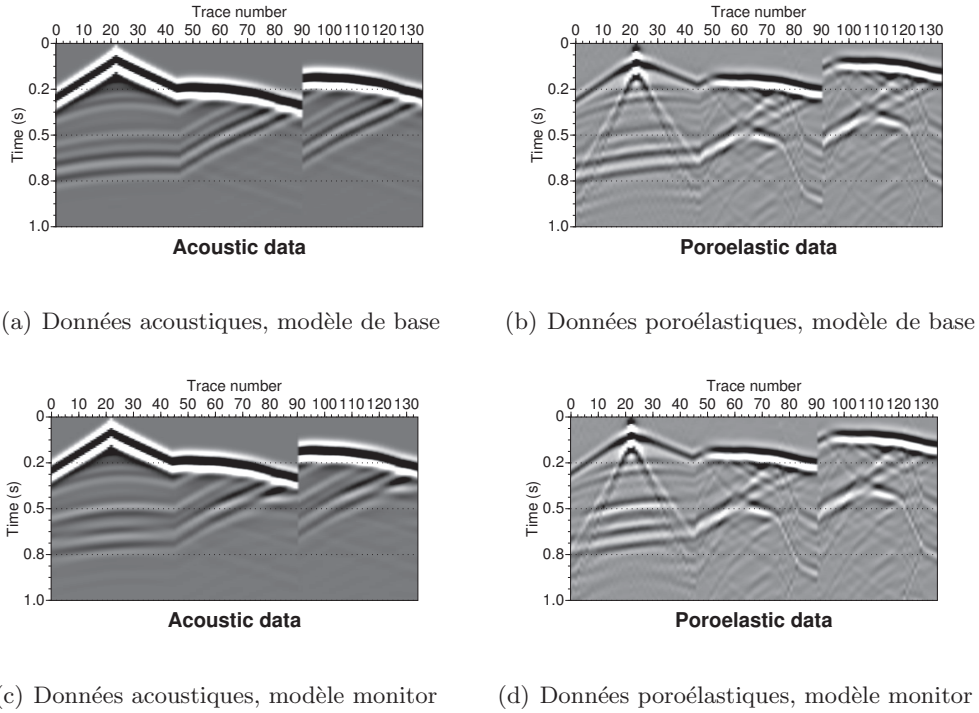


FIGURE 4.22 – Sismogrammes de la vitesse de déplacement solide vertical u_z , obtenus pour une source située à 250 m du bord du dispositif d'acquisition. (a,c) Simulations acoustiques pour le modèle de base (a) et pour le modèle après injection (c). (b,d) Simulations poroélastiques pour le modèle de base (b) et pour le modèle après injection (d). Les traces 1 à 45 correspondent aux récepteurs placés sur la ligne horizontale, les traces 46 à 90 correspondent aux récepteurs du puits de gauche ($x = 75$ m) et les traces 91 à 135 aux récepteurs du puits de droite ($x = 625$ m).

4.4.1.2 Inversions acoustiques et downscaling pour le modèle de base

A partir des données obtenues par la première étape d'inversion, une étape de downscaling point par point est effectuée en utilisant l'algorithme NA. On a vu dans la partie 4.3 que la sensibilité des paramètres poroélastiques à l'inversion est très dépendante des données macro-échelles utilisées. Dans cette étude, l'inversion acoustique fournit des valeurs de V_P avec une résolution haute fréquence (figure 4.23(a)). Les résultats obtenus par l'étape d'inversion FWI sont bons pour l'inversion acoustique, l'utilisation du modèle a-priori permet de bien contraindre l'optimisation et de converger vers le minimum global (le modèle de V_P obtenu sur la figure 4.23(a) est très proche du modèle vrai, représenté sur la figure 4.20(a)).

La réussite de l'étape de downscaling dépend directement de la qualité des résultats macro-échelles obtenus par FWI. On essaie ici de déterminer le plus précisément possible le modèle de base et en particulier, les paramètres du squelette car on suppose que l'on connaît la lithologie et la phase fluide (grâce aux données de puits). En règle générale, les paramètres du squelette sont définis par la porosité ϕ et le coefficient de consolidation cs . Ici, la définition du module d'incompressibilité des grains K_s contient des informations sur l'état de consolidation du squelette (Dai *et al.*, 1995) ; Le paramètre cs a donc été choisi constant dans ce modèle (voir tableau 4.7). On a vu dans la partie 4.3 que la reconstruction conjointe de ϕ et cs à partir de seulement V_P n'était pas parfaite avec des minima locaux (figure 4.9 et tableau 4.2). A partir des données V_P reconstruites par FWI acoustique (figure 4.23(a)), si on reconstruit uniquement la porosité par downscaling, on a de très bons résultats (figure 4.23(b) à comparer avec le vrai modèle 4.18(g)). En revanche, l'inversion conjointe de ϕ et cs (figures 4.23(c) et 4.23(d)) ou plus logiquement de ϕ et K_s (figures 4.23(e) et 4.23(f)) donne des résultats incorrects même si ϕ est à peu près bien estimé par inversion conjointe avec cs (alors que cs ne l'est pas). On voit donc, que si on dispose de peu de données (uniquement V_P), on ne peut reconstruire que la porosité.

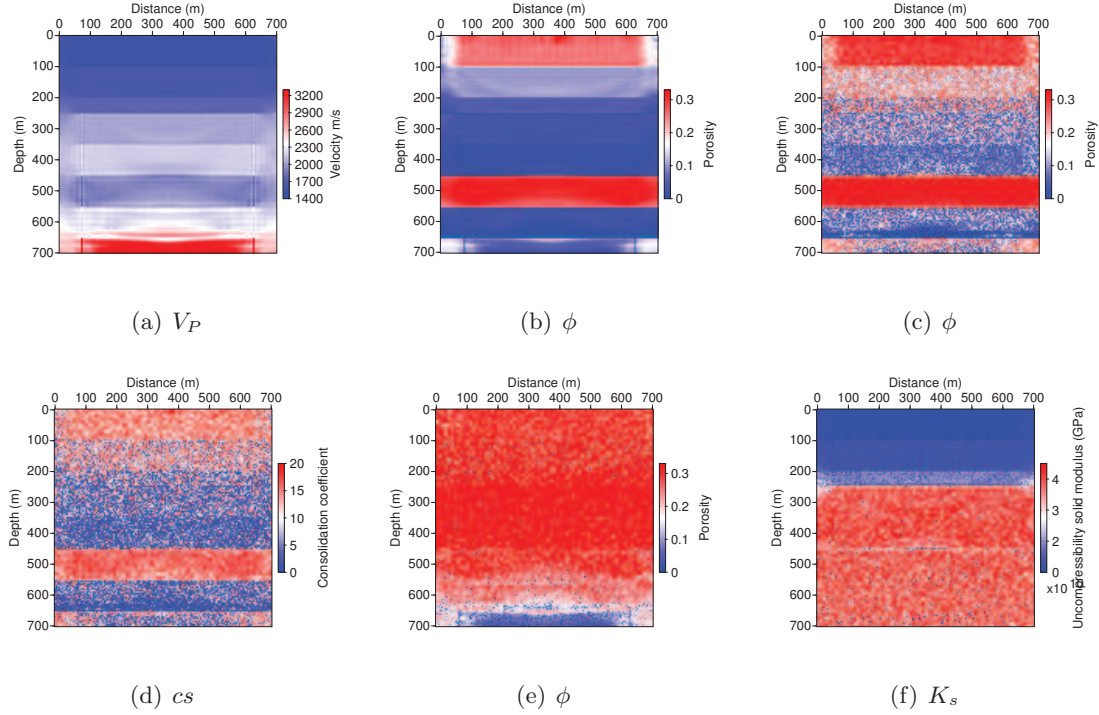


FIGURE 4.23 – Downscaling des paramètres poroélastiques du squelette (ϕ , cs et K_s) à partir des données V_P estimées par inversion acoustique (a) pour le modèle de base (avant injection). (b) Inversion de ϕ uniquement. (c,d) Inversion conjointe de ϕ (c) et cs (d). (e,f) Inversion conjointe de ϕ (e) et K_s (f).

4.4.1.3 Inversions élastiques et downscaling pour le modèle de base

L'inversion des données poroélastiques vise à reconstruire les données macro-échelles V_P et V_S . Cependant, pour des raisons de coût numérique, l'inversion FWI élastique des données poroélastiques fournit des valeurs de V_P et V_S plus basses fréquences que l'inversion acoustique (figures 4.24(a) et 4.24(b)). De plus, le manque d'illumination n'est pas suffisamment compensé par l'ajout des informations de puits (par les récepteurs et par l'information a-priori) pour bien prendre en compte toute la complexité des sismogrammes (voir figure 4.22). Les résultats de V_P et V_S (figures 4.24(a) et 4.24(b)) sont donc moins précis que ceux de l'inversion acoustique.

L'inversion de la porosité seule est correcte (de moins bonne qualité que celle issue des données acoustique à cause de la reconstruction plus basse fréquence de V_P). L'inversion conjointe de ϕ avec respectivement cs ou K_s est correcte même si ces deux paramètres sont mal reconstruits.

4.4.1.4 Inversions acoustiques et downscaling pour le modèle après injection

Après avoir caractérisé le milieu avant injection (en particulier, la porosité), une inversion différentielle basée sur la méthode des doubles différences (Watanabe *et al.*, 2004; Denli & Huang, 2009) a été menée sur le modèle après injection pour les données acoustiques (Asnaashari *et al.*, 2011). On obtient ainsi un modèle de vitesse V_P après injection où le changement

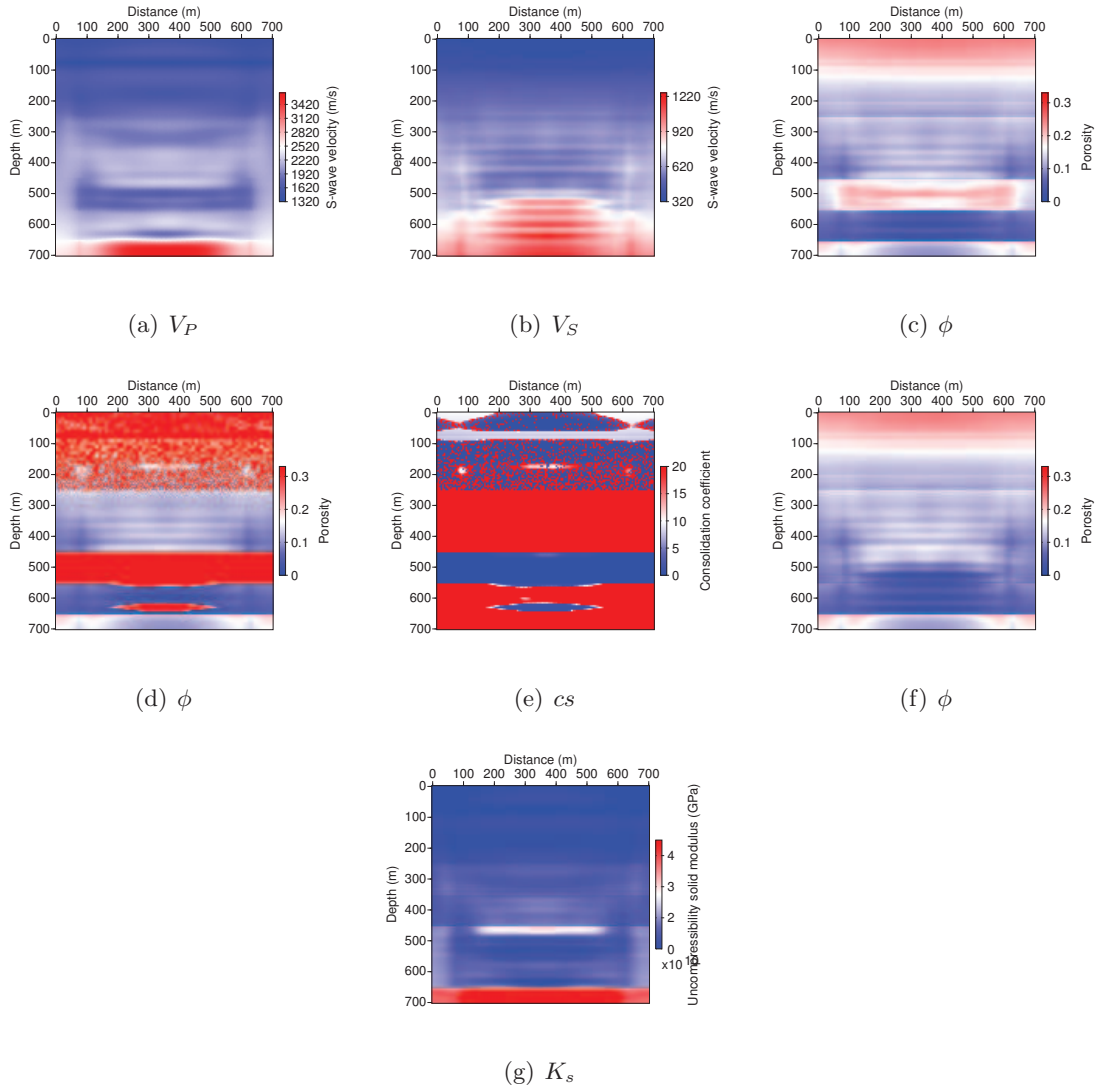


FIGURE 4.24 – Downscaling des paramètres poroélastiques du squelette (ϕ , cs et K_s) à partir des données V_P (a) et V_S (b) estimées par inversion élastique pour le modèle de base (avant injection). (c) Inversion de ϕ uniquement. (d,e) Inversion conjointe de ϕ (d) et cs (e). (f,g) Inversion conjointe de ϕ (f) et K_s (g).

de fluide dans la couche réservoir est bien visible. Pour l'étape de downscaling, on suppose le milieu encaissant (phase solide et squelette) déterminé par l'analyse du modèle de base et donc parfaitement connu et on inverse uniquement les paramètres de la phase fluide : module d'incompressibilité K_f , viscosité η et masse volumique ρ_f . L'analyse de sensibilité (figures 4.10, 4.11, 4.12, 4.13, 4.14 et 4.15) a montré qu'à partir de V_P uniquement, on pouvait reconstruire K_f et ρ_f mais pas la viscosité. Dans cet exemple, η (figure 4.25(b)) et ρ_f (figure 4.25(c)) sont très mal contraints et mal reconstruits, mais en revanche l'inversion de K_f (figure 4.25(d)) est bonne et on retrouve bien la répartition géométrique des nouveaux fluides. De plus, comme les valeurs de K_f sont bien estimées, on peut déterminer le type de fluide et sa répartition même si les deux autres paramètres ne sont pas reconstruits. Le deuxième test (figures 4.25(e),

4.25(f), 4.25(g) et 4.25(h)) vise à inverser ϕ en plus des paramètres de la phase fluide, la porosité pouvant varier au cours de l'injection. Dans ce cas-là, la porosité est bien reconstruite sur l'ensemble du modèle mais la reconstruction de K_f est moins précise, notamment en terme d'amplitude. La viscosité n'est pas reconstruite mais étrangement, les variations spatiales de ρ_f sont reconstruites même si les amplitudes des variations sont fausses.

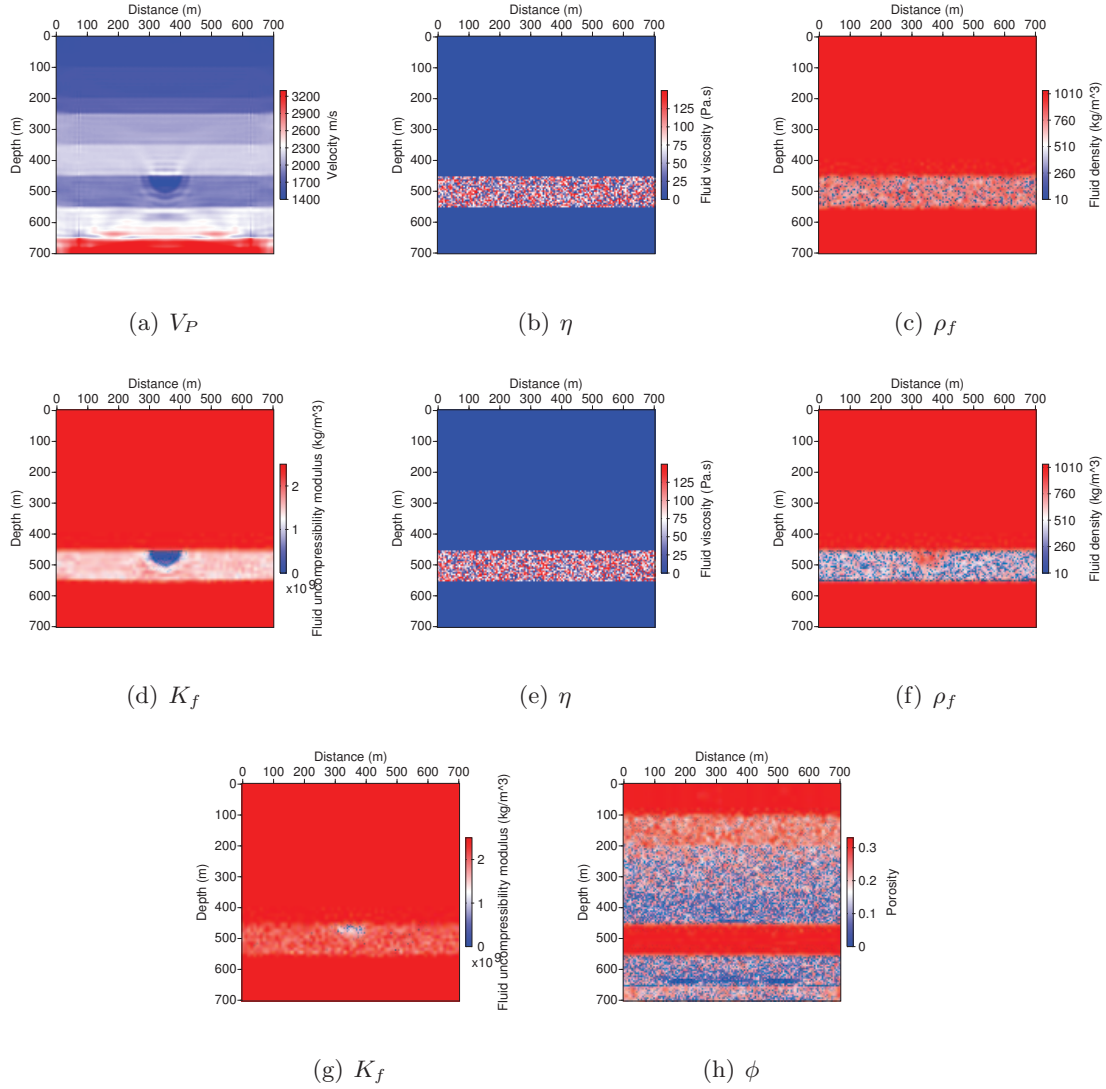


FIGURE 4.25 – Downscaling des paramètres poroélastiques de la phase fluide et de la porosité à partir des données V_P estimées par inversion acoustique (a) pour le modèle après injection. (b,c,d) Inversion conjointe de η (b), ρ_f (c) et K_f (d). (e,f,g,h) Inversion conjointe de η (e), ρ_f (f), K_f (g) et ϕ (h).

4.4.1.5 Conclusion sur le modèle de réservoir

Dans ce premier exemple synthétique de réservoir, on a simulé des données acoustiques et poroélastiques. Même si la complexité des sismogrammes est plus importante pour les données

poroélastiques (à cause des nombreuses converties PS), les ondes réfléchies de plus forte amplitude sont les mêmes et ont été interprétées par l'inversion FWI. Les images de V_P obtenues par FWI acoustiques sont plus précises que celles obtenues par inversion élastique (basse fréquence) mais l'inversion élastique permet d'obtenir une image de V_S . La seconde étape d'inversion des cartes spatiales des paramètres macro-échelles permet de bien reconstruire la porosité du milieu et les paramètres de consolidation quand on dispose de V_S . Après avoir déterminé ces paramètres pour le modèle de base, on a déterminé les variations des paramètres de la phase fluide à partir d'une image V_P obtenue par inversion différentielle. On reconstruit bien le module d'incompressibilité du fluide, et on peut ainsi déterminer la répartition spatiale des fluides injectés si on connaît le milieu encaissant.

4.4.2 Application hydrogéophysique de subsurface

4.4.2.1 Description du modèle

Dans ce second exemple, on utilise les données acquises sur des sédiments alluviaux avec différentes méthodes géophysiques (GPR, sismique et électrique) afin de déterminer le contenu en eau de ces sédiments partiellement saturés (Garambois *et al.*, 2002). Le modèle sismique synthétique qui en est déduit est un modèle constitué de trois couches de sables et de graves partiellement saturées en eau. Les valeurs des paramètres poroélastiques et visco-élastiques sont données dans le tableau 4.8. La répartition géométrique est donnée par la figure 4.26 pour les paramètres micro-échelles et par la figure 4.27 pour les paramètres macro-échelles. La saturation en eau augmente avec la profondeur et les paramètres de la phase fluide équivalente varient également. Les paramètres géométriques du squelette (porosité et perméabilité) varient peu et la consolidation (K_D et G_D) augmente un peu avec la profondeur. Les principales variations sont donc dues uniquement à la saturation qui influe directement sur les paramètres élastiques. La vitesse des ondes P augmente avec la saturation alors que V_S ne varie quasiment pas. De même, la masse volumique moyenne et les facteurs de qualité augmentent avec la profondeur.

Dans ce milieu, on simule une expérience de tomographie sismique en surface, classique et facile à mettre en oeuvre au niveau acquisition. On calcule des données poroélastiques synthétiques avec 12 sources explosives sur une ligne horizontale à 1 m de profondeur, espacées de 4 m. On dispose 49 géophones à 1.1 m de profondeur espacés de 1 m. Les sismogrammes obtenus sont représentés sur la figure 4.28. On observe bien l'onde P directe et deux ondes P refractées sur les deux couches plus profondes. Comme V_S ne varie quasiment pas, on n'observe pas de conversions PS.

	Couches de sable		
	1	2	3
K_s (GPa)	35		
ρ_s (kg/m ³)	2600		
m	1		
ϕ	0.26	0.24	0.23
k_0 (m ²)	10 ⁻¹¹	10 ⁻¹²	10 ⁻¹²
K_D (GPa)	0.3	2.1	2.26
G_D (GPa)	0.3	0.31	0.31
V_1	0.15	0.3	1
K_{f1} (eau) (GPa)	2.27		
K_{f2} (air) (GPa)	0.00015		
K_f (effectif) (GPa)	0.00322	0.00567	2.27
ρ_{f1} (eau) (kg/m ³)	1000		
ρ_{f2} (air) (kg/m ³)	1.2		
ρ_f (effectif) (kg/m ³)	151.02	300.84	1000
η_1 (eau) (Pa.s)	0.001		
η_2 (air) (Pa.s)	0.000018		
η (effectif) (Pa.s)	0.0000329	0.0000601	0.001
f_c (Hz)	901	7628	36606
Régime de l'onde de Biot	Diffusif		
V_P (m/s)	598	1112	2104
V_S (m/s)	391	389	373
Q_P	481	2447	6483
Q_S	459	2164	3552
ρ (kg/m ³)	1963	2048	2232

TABLE 4.8 – Paramètres micro et macro-échelles du modèle tricouche de sables partiellement saturés. Les vitesses et les facteurs de qualité des ondes P et S sont calculés pour la fréquence centrale de la source (100 Hz).

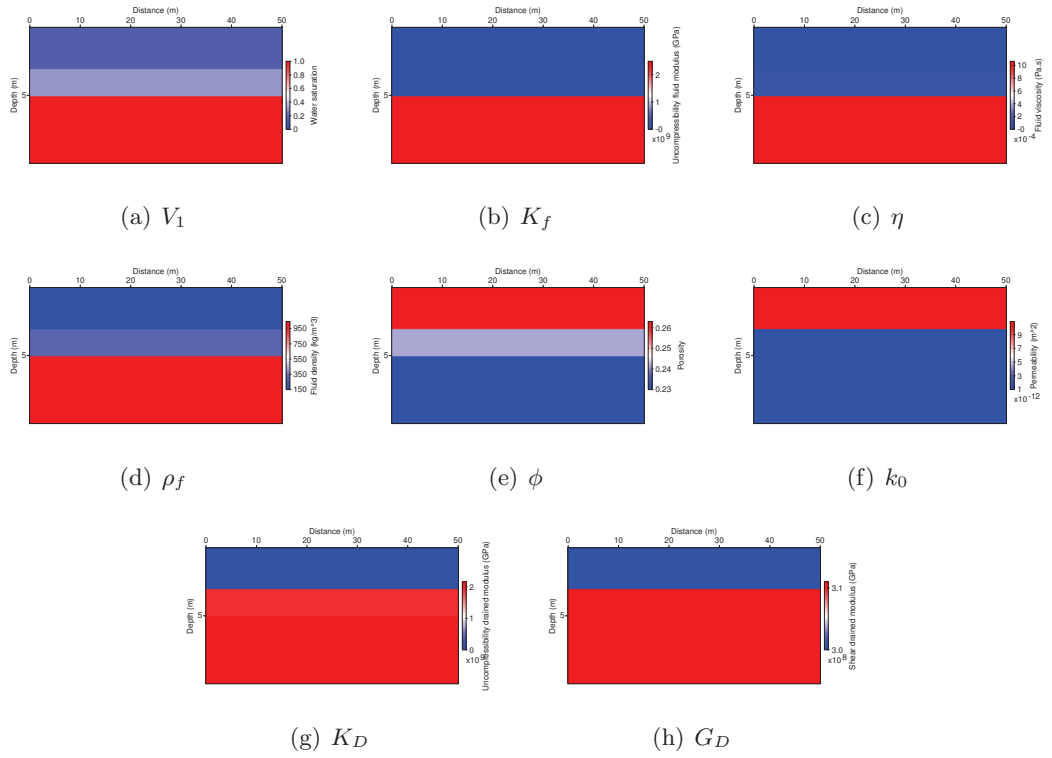


FIGURE 4.26 – Valeurs des paramètres poroélastiques micro-échelles : (a) V_1 , (b) K_f , (c) η , (d) ρ_f , (e) ϕ , (f) k_0 , (g) K_D , (h) G_D . Les valeurs exactes sont données dans le tableau 4.8. Les paramètres de la phase solide (K_s , G_s et ρ_s) sont constants.

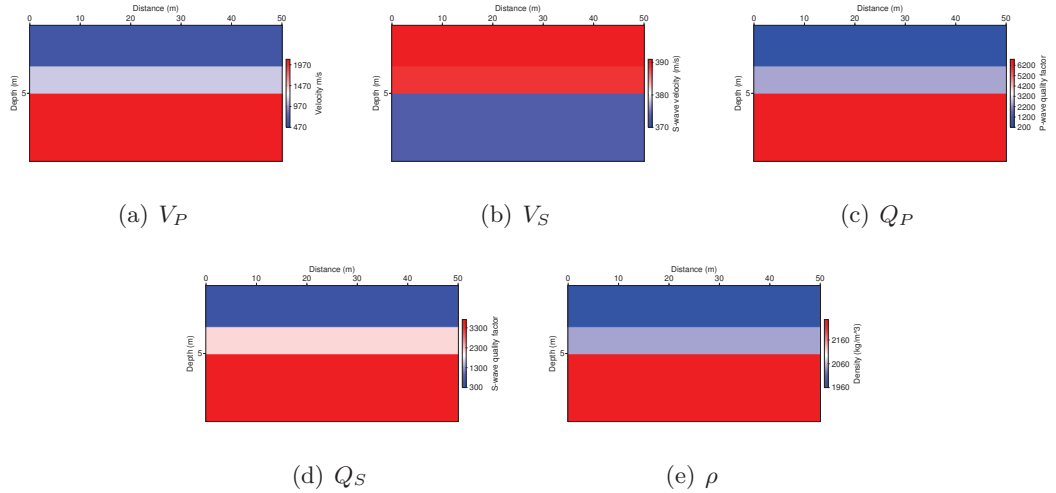
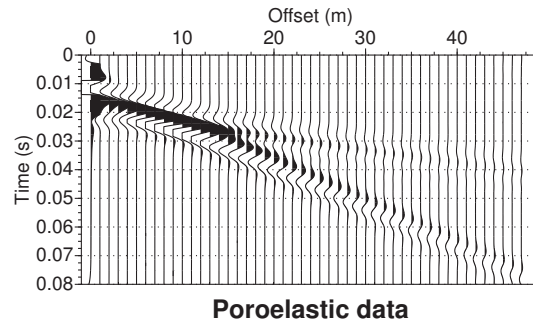
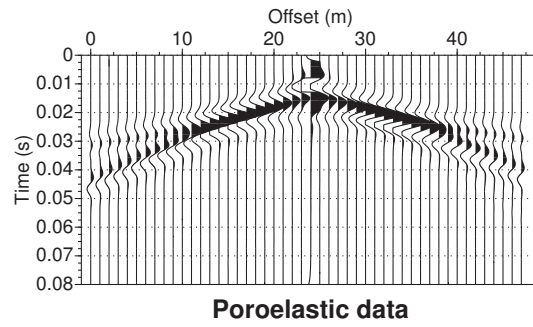


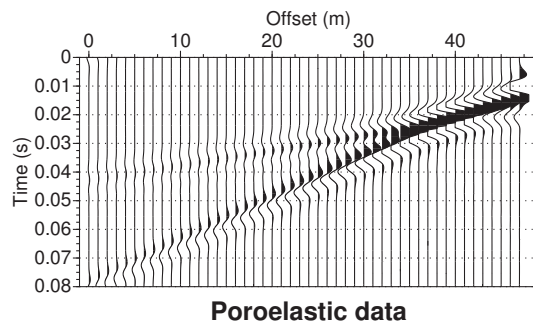
FIGURE 4.27 – Valeurs des paramètres visco-élastiques macro-échelles : (a) V_P , (b) V_S , (c) Q_P , (d) Q_S , (e) ρ . Les valeurs exactes sont données dans le tableau 4.8.



(a)



(b)



(c)

FIGURE 4.28 – Sismogrammes du déplacement solide vertical u_z , obtenus pour des sources situées à un offset de 0 m (a), de 24 m (b) et de 48 m (c).

4.4.2.2 Tomographie des temps de premières arrivées et downscaling

On utilise les données poroélastiques synthétiques (sismogrammes de la figure 4.28) pour retrouver les paramètres macro-échelles par une étape d'inversion par tomographie des temps d'arrivées. On utilise le code Sardine (Demanet *et al.*, 2001) où le problème direct (calcul des temps de premières arrivées) est réalisé par une méthode de différences finies (Vidale, 1988, 1990), et où le problème d'optimisation est résolu par une méthode itérative (SIRT : "Simultaneous Iterative Reconstruction Technique, Dines & Lytle (1979)). L'inversion acoustique donne les résultats présentés sur la figure 4.29(a). Le tracé des rais associé à cette inversion est donné sur la figure 4.29(b). La profondeur de pénétration est directement liée à l'interface entre les couches 2 et 3 où se propage l'onde réfractée enregistrée à long offset.

Le modèle obtenu (figure 4.29(a)) est assez proche du vrai modèle (figure 4.27(a)) mais beaucoup plus "lissé", les deux interfaces ne sont pas marquées malgré le fort contraste de V_P . Le downscaling de la porosité et de la saturation en eau est ensuite réalisé à partir de ces données V_P (figure 4.29) en supposant que l'on connaît les paramètres des phases fluides (air et eau) et de la phase solide. Que ce soit pour l'inversion conjointe des deux paramètres (figure 4.29(e)) ou en inversant seulement ϕ (figure 4.29(c)), la porosité est mal reconstruite à part pour la troisième couche. V_1 est mieux estimée (conjointement avec ϕ ou pas), notamment dans la première et la troisième couche. Les résultats du downscaling, détaillés dans le tableau 4.9 et illustrés par la figure 4.30 pour la première couche, démontrent l'importance de la précision de l'image V_P pour le downscaling.

Dans le tableau 4.9, les valeurs exactes et les valeurs minimales, maximales et moyennes de V_P estimées par tomographie pour chaque couche sont utilisées pour le downscaling de ϕ et V_1 . Les erreurs faites sur V_P par la tomographie sont comprises entre 1 et 30%. Le downscaling à partir des valeurs de V_P correctes fournit des valeurs de ϕ et V_1 correctes (moins de 2% pour les couches 1 et 3 à 50% pour la couche 2). L'utilisation de V_S améliore un peu les résultats. En revanche, dès que l'estimation de V_P est biaisée, l'erreur d'estimation de ϕ et V_1 augmente. La figure 4.30 donne les représentations des fonctions misfit de ϕ et V_1 pour la couche 1 avec les valeurs de V_P estimées par tomographie. L'estimation de V_1 reste correcte car la plage de valeur de misfit faible reste la même alors que la fonction misfit de ϕ est plus étroite et le décalage créé par la fausse valeur de V_P décale le minimum local. Il faut noter que lorsque la valeur de V_P est trop mal estimée (20% d'erreur pour la valeur minimale estimée par tomographie), la fonction misfit de V_1 est également décalée vers un autre minimum (figure 4.30(c)) et l'estimation de V_1 est mauvaise (artefacts de la figure 4.29(f)).

En résumé, l'estimation de la porosité et de la saturation en eau conjointement est difficile à partir de données macro-échelles issues de tomographie des temps d'arrivées, car les biais sur les valeurs de V_P (lissage basse fréquence) ont une forte influence sur le downscaling de ϕ . En revanche, l'estimation de V_1 est assez robuste et fournit des résultats satisfaisants.

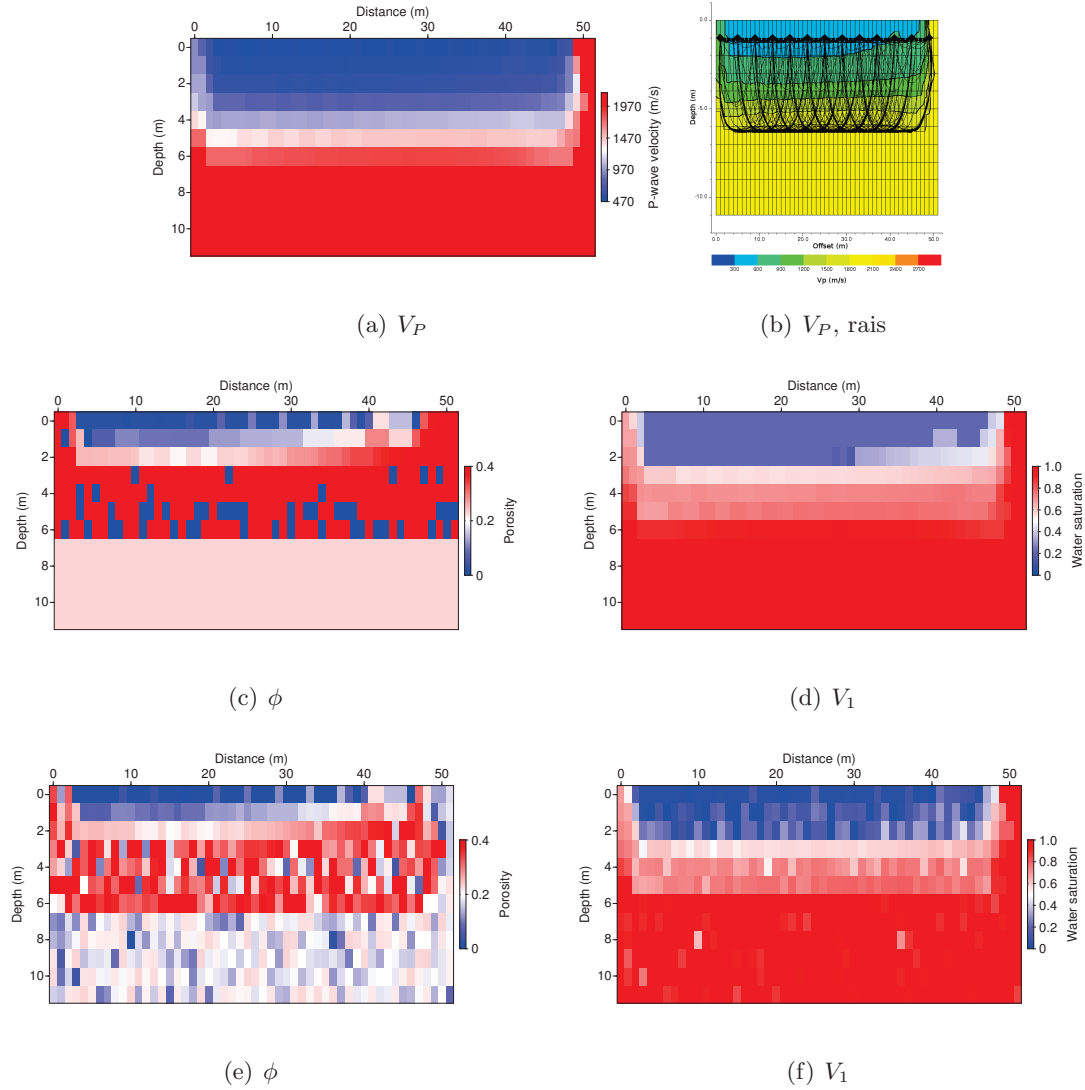


FIGURE 4.29 – Downscaling de la porosité ϕ (c,e) et de la saturation en eau V_1 (d,f) à partir des données V_P (a) estimées par tomographie des temps d'arrivées. (b) Tracé des rais utilisé dans l'inversion de V_P . (c) Inversion de ϕ uniquement. (d) Inversion de V_1 uniquement. (e,f) Inversion conjointe de ϕ (e) et V_1 (f).

		V_P (m/s)	V_S (m/s)	$\Delta V_P/V_P$ (%)	ϕ	$\Delta\phi/\phi$ (%)	V_1	$\Delta V_1/V_1$ (%)
Couche 1	Paramètres exacts				0.26		0.15	
	Données exactes	598			0.2639	1.5	0.2202	47
	Données exactes	598	391		0.2622	0.85	0.1697	13
	Données estimées minimales	480		20	0.0144	94	0.0460	69
	Données estimées maximales	625		4.5	0.3340	28	0.2064	38
	Données estimées moyennes	552.5		7.6	0.0144	94	0.0460	69
Couche 2	Paramètres exacts				0.24		0.30	
	Données exactes	1112			0.1102	54	0.4726	58
	Données exactes	1112	389		0.2344	2.3	0.0497	83
	Données estimées minimales	800		28	0.0073	97	0.0474	84
	Données estimées maximales	1450		30	0.1376	43	0.7073	136
	Données estimées moyennes	1125		1.2	0.2440	1.7	0.0403	87
Couche 3	Paramètres exacts				0.23		1	
	Données exactes	2104			0.2262	1.7	0.9978	0.22
	Données exactes	2104	373		0.2299	0.04	0.9999	0.0001
	Données estimées minimales	1550		26	0.2900	26	0.8100	19
	Données estimées maximales	2100		0.19	0.1640	29	0.9507	4.9
	Données estimées moyennes	1825		13	0.3830	67	0.9580	4.2

TABLE 4.9 – Estimation de la porosité ϕ et de la saturation en eau V_1 en fonction des valeurs de vitesses V_P (et V_S) exactes ou estimées par tomographie des temps d'arrivées pour les trois couches de sables (valeurs minimales, maximales et moyennes). Les pourcentages d'erreurs ($\Delta x/x$) entre les valeurs vraies et les valeurs estimées sont calculés pour V_P , ϕ et V_1 .

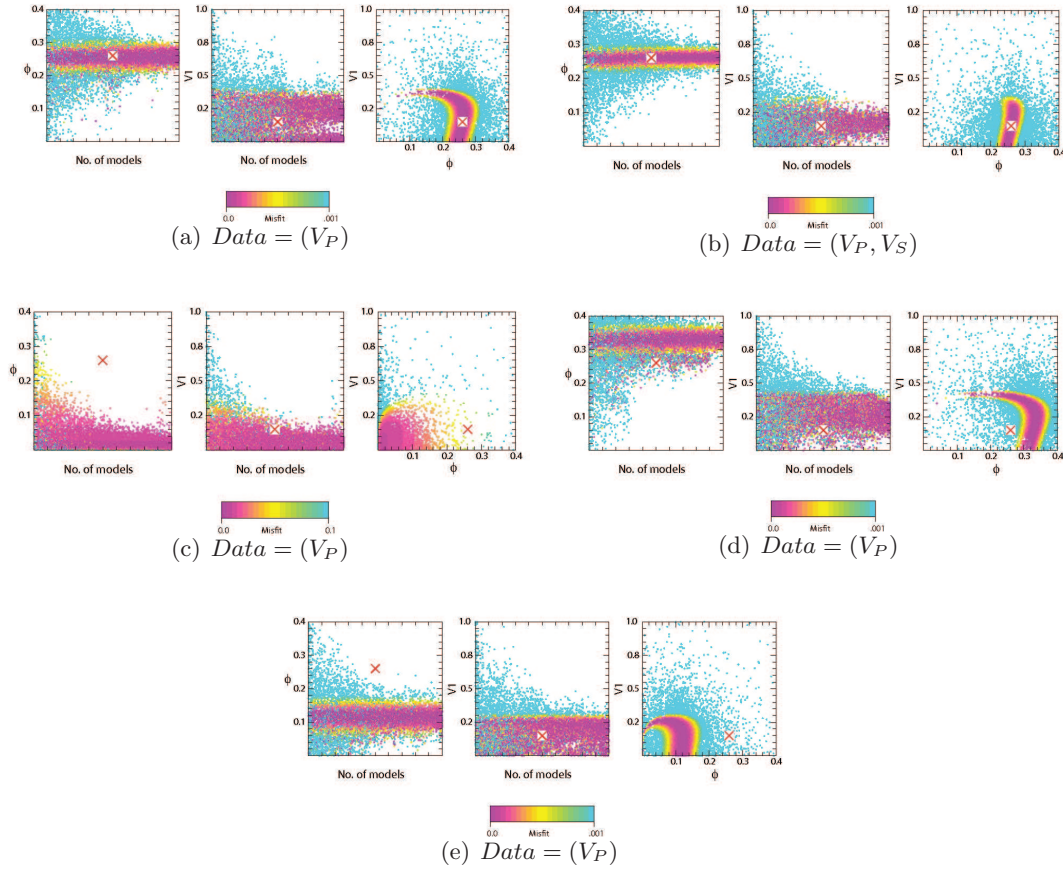


FIGURE 4.30 – Inversion de la porosité ϕ et de la saturation en eau V_1 à partir des données (a,c,d,e) V_P et (b) V_P, V_S exactes ou estimées dans la première couche de sable. Le modèle vrai est représenté par la croix rouge. La couleur des points dépend de la valeur de misfit obtenue pour le modèle calculé. Les inversions sont faites pour les données vraies (a,b), et pour les valeurs estimées par tomographie des temps d'arrivées dans la couche 1 : valeur minimale (c), valeur maximale (d) et valeur moyenne (e).

4.4.2.3 Apport des données de vitesses et des ondes S et des atténuations sur le downscaling

Dans ce paragraphe, on va analyser l'apport des données de vitesses des ondes S et des atténuations Q_P et Q_S , en plus des données V_P estimées par tomographie des temps d'arrivées (figure 4.29(a)). En effet, l'analyse de sensibilité de la partie 4.3.4 a montré que l'utilisation des atténuations était indispensable pour bien estimer la saturation et les paramètres du squelette dans un milieu non saturé.

On voit sur la figure 4.31 que l'apport des informations de V_S est négligeable pour mieux contraindre l'estimation de ϕ et V_1 indépendamment (figures 4.31(a) et 4.31(b), à comparer avec les figures 4.29(c) et 4.29(d), estimées avec V_P et avec les figures vraies 4.26(e) et 4.26(a), respectivement). En effet, comme on inverse uniquement un paramètre (ϕ ou V_1), qui a, qui plus est, peu d'influence sur V_S , les informations apportées par V_S n'aident pas à la convergence

hors des minimas locaux. En revanche, quand on inverse conjointement les deux paramètres, l'apport de V_S améliore l'estimation, de ϕ notamment.

En utilisant en plus les atténuations des ondes P et S, l'estimation indépendante de ϕ (figure 4.32(a)) et V_1 (figure 4.32(b)) est très bonne et l'estimation conjointe (figures 4.32(c) et 4.32(d)) est également améliorée. Ici, les atténuations apportent des informations cruciales pour permettre la convergence vers le minimum global.

Ainsi, l'utilisation de données sismiques supplémentaires (V_S , Q_P et Q_S) est très importante pour mieux contraindre le downscaling des paramètres poroélastiques. La connaissance de ces paramètres macro-échelles est donc non négligeable quand on souhaite inverser plusieurs paramètres poroélastiques.

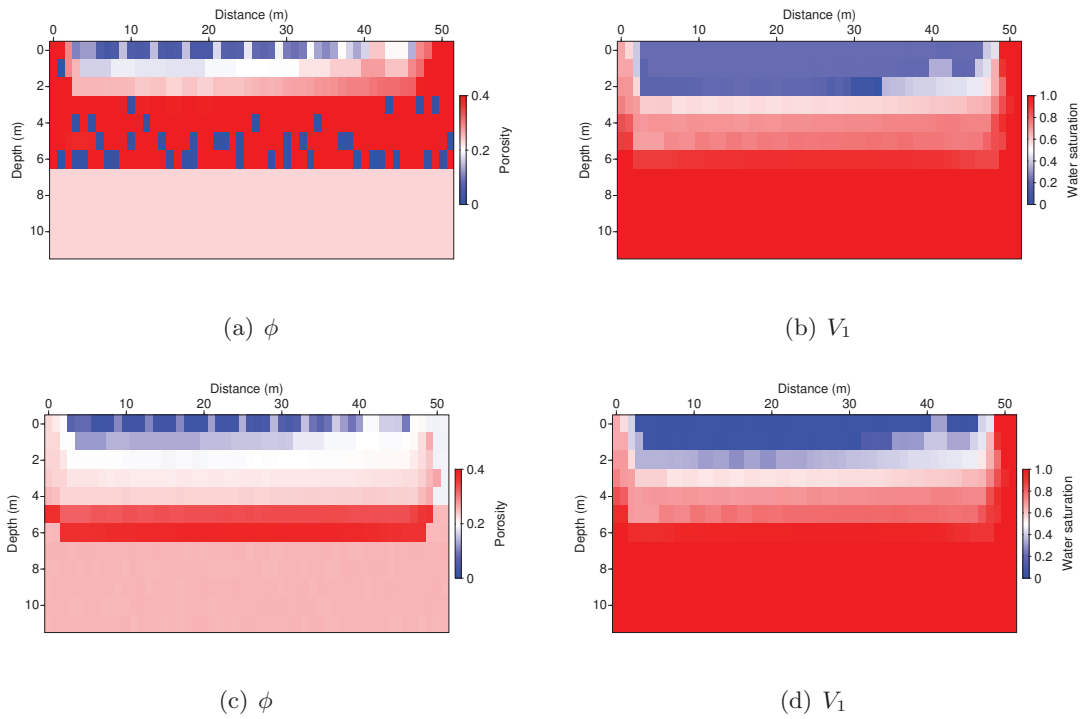


FIGURE 4.31 – Downscaling de la porosité ϕ (a,c) et de la saturation en eau V_1 (b,d) à partir des données V_P (figure 4.29(a)) estimées par tomographie des temps d'arrivées et des données V_S . (a) Inversion de ϕ uniquement. (b) Inversion de V_1 uniquement. (c,d) Inversion conjointe de ϕ (c) et V_1 (d).

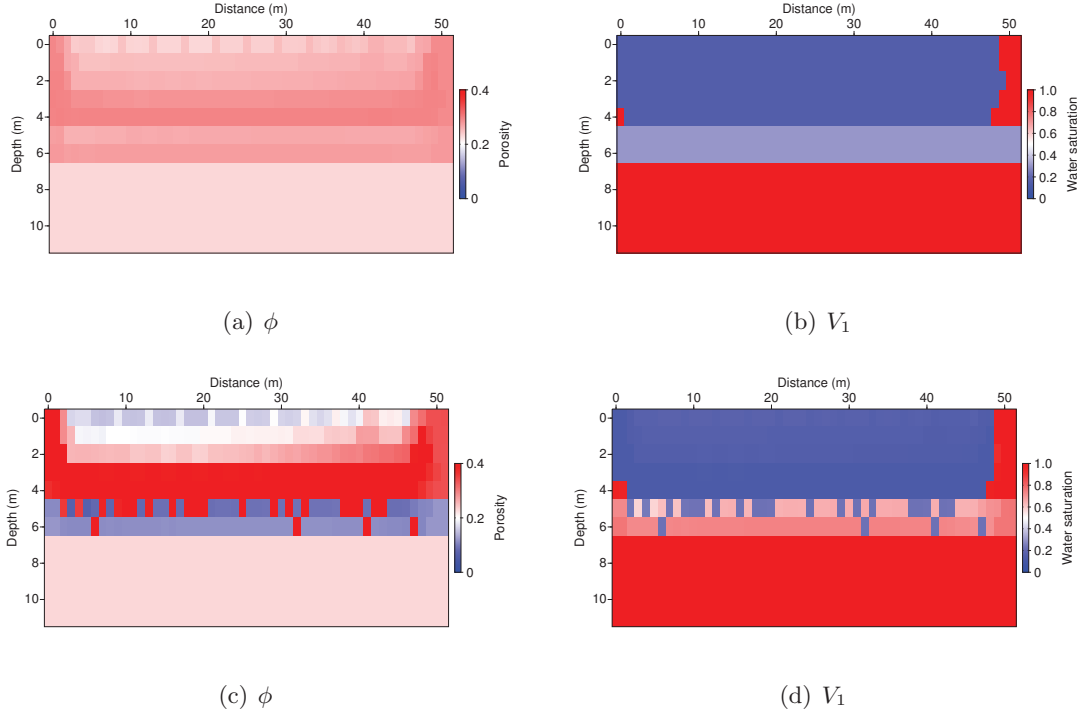


FIGURE 4.32 – Downscaling de la porosité ϕ (a,c) et de la saturation en eau V_1 (b,d) à partir des données V_P (figure 4.29(a)) estimées par tomographie des temps d'arrivées, des données V_S et des données Q_P et Q_S . (a) Inversion de ϕ uniquement. (b) Inversion de V_1 uniquement. (c,d) Inversion conjointe de ϕ (c) et V_1 (d).

4.4.2.4 Interprétation des données réelles

Le modèle synthétique utilisé dans cette partie est déduit de données réelles publiées par Garambois *et al.* (2002). A partir des profils de vitesses V_P et V_S déterminés respectivement par tomographie et par sismique-réflexion des ondes S respectivement, Garambois *et al.* (2002) retrouvent des valeurs de saturation en eau, de porosité et de modules du squelette en se calant sur les relations de Biot-Gassmann par essai-erreur. Les figures 4.33 et 4.34 présentent une inversion de ϕ , V_1 , K_D et G_D avec l'algorithme de voisinage en utilisant les données de Garambois *et al.* (2002) et en fixant les paramètres poroélastiques des phases fluides et solides (voir tableau 4.10). Pour chaque couche, le downscaling permet de retrouver un ensemble de valeurs acceptables (misfit inférieur à 0.1) pour les quatre paramètres inversés. Quand on utilise uniquement V_P , les plages de valeurs obtenues pour chaque couche sont les suivantes :

- Couche 1 (figure 4.33(a)) : ϕ compris entre 0 et 0.3 avec des patches entre 0 et 0.1 et autour de 0.2, V_1 compris entre 0 et 0.3, K_D et G_D compris entre 0.15 et 0.4 GPa .
- Couche 2 (figure 4.33(b)) : ϕ autour de 0.1 et entre 0.25 et 0.45, V_1 compris entre 0 et 0.4 et entre 0.6 et 0.8, K_D compris entre 0.1 et 3.5 GPa et G_D compris entre 0.1 et 1.5 GPa .
- Couche 3 (figure 4.33(c)) : ϕ compris entre 0 et 0.35, V_1 compris entre 0.2 et 0.8, K_D compris entre 2 et 10 GPa et G_D compris entre 0.1 et 5 GPa .

Les valeurs des modules du squelette sont réalistes et bien en accord avec ceux choisis dans le modèle synthétique et retrouvés par Garambois *et al.* (2002). La porosité et la saturation en eau sont plus mal définies.

Avec V_P et V_S , on obtient des intervalles de valeurs correctes plus étroits :

- Couche 1 (figure 4.34(a)) : ϕ compris entre 0 et 0.15, V_1 compris entre 0 et 0.3, K_D et G_D compris entre 0.2 et 0.4 GPa .
- Couche 2 (figure 4.34(b)) : ϕ compris entre 0 et 0.2, V_1 compris entre 0 et 0.5, K_D compris entre 1.5 et 3.5 GPa et G_D compris entre 0.2 et 0.5 GPa .
- Couche 3 (figure 4.34(c)) : ϕ compris entre 0 et 0.2, V_1 compris entre 0.4 et 0.6 ou entre 0.8 et 1, K_D supérieur à 8 GPa et G_D compris entre 0.2 et 0.5 GPa .

Les valeurs des modules K_D et G_D sont plus précises et on obtient des valeurs plus réalistes pour ϕ et V_1 grâce à l'apport des informations de V_S . Pour interpréter plus précisément ces résultats, on pourrait faire d'autres inversions en supposant que la porosité varie peu (peu de consolidation en subsurface) ou que le milieu est saturé en eau dans la couche 3 (contraste fort pour V_P et pas de variation pour V_S). Ces hypothèses fortes permettent de mieux contraindre l'estimation des paramètres comme l'ont fait Garambois *et al.* (2002). Ils utilisent également des données obtenues grâce à d'autres méthodes géophysiques (GPR, électrique) pour valider les résultats obtenus par downscaling. On a vu également dans le paragraphe précédent sur les données synthétiques que l'apport des données de vitesses des ondes S et surtout des atténuations Q_P et Q_S était crucial pour améliorer l'estimation de la porosité et de la saturation en eau (ce qui est corrélé aux tests de sensibilité de la partie 4.3.4).

		Paramètres micro-échelles fixés		
K_s	(GPa)	35		
ρ_s	(kg/m^3)	2600		
m		1		
k_0	(m^2)	10^{-11}		
K_{f1} (eau)	(GPa)	2.27		
K_{f2} (air)	(GPa)	0.00015		
ρ_{f1} (eau)	(kg/m^3)	1000		
ρ_{f2} (air)	(kg/m^3)	1.2		
η_1 (eau)	($Pa.s$)	0.001		
η_2 (air)	($Pa.s$)	0.000018		
Paramètres micro-échelles inversés		ϕ, V_1, K_D, G_D		
		Données macro-échelles		
		Couche 1	Couche 2	Couche 3
V_P	(m/s)	467	1088	2097
V_S	(m/s)	370		

TABLE 4.10 – Paramètres micro-échelles fixés et données macro-échelles déduites des données réelles de sismique.

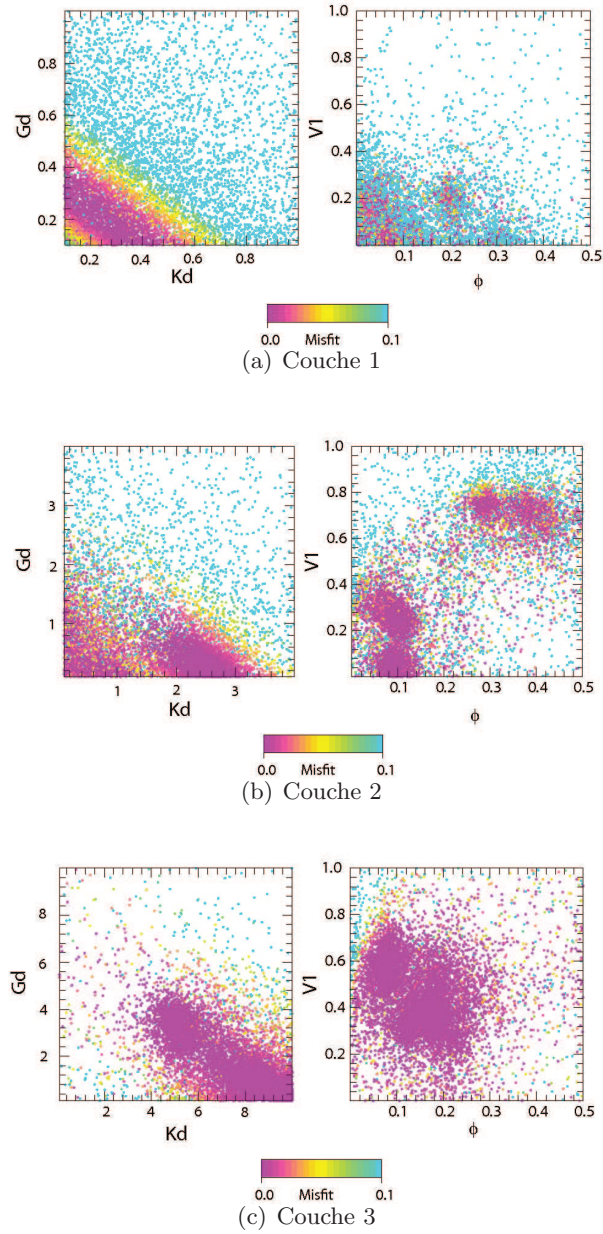


FIGURE 4.33 – Inversion de la porosité ϕ , de la saturation en eau V_1 , du module d'incompressibilité du squelette K_D et du module de cisaillement du squelette G_D à partir des données réelles V_P pour les trois couches de sables (a,b,c). La couleur des points dépend de la valeur de misfit obtenue pour le modèle calculé.

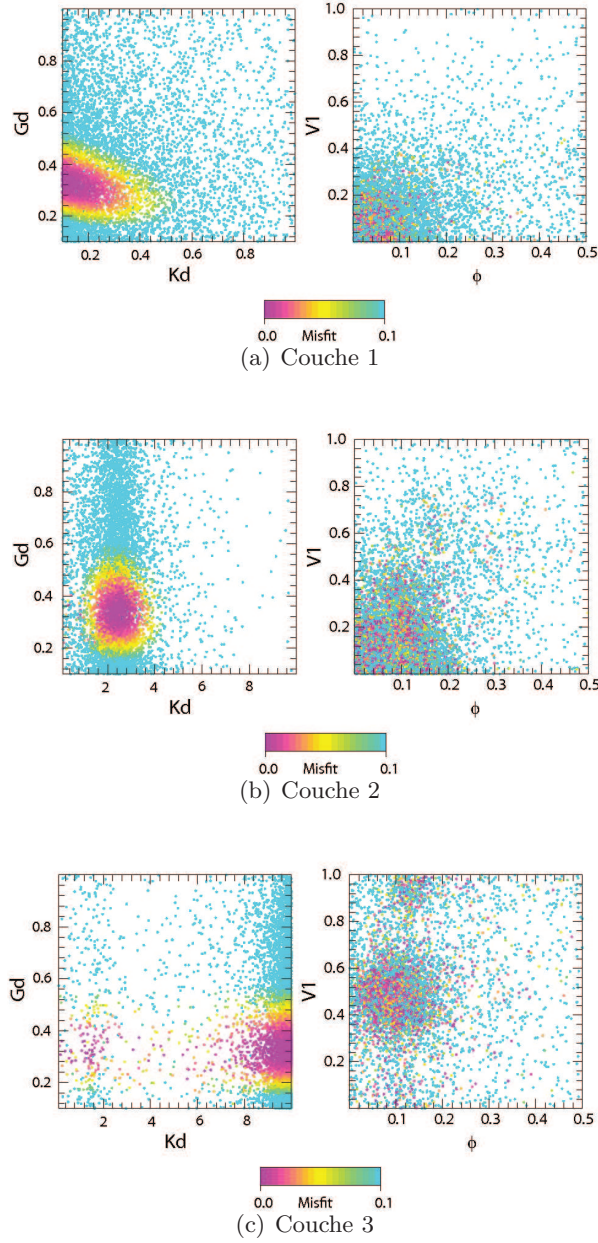


FIGURE 4.34 – Inversion de la porosité ϕ , de la saturation en eau V_1 , du module d'incompressibilité du squelette K_D et du module de cisaillement du squelette G_D à partir des données réelles V_P et V_S pour les trois couches de sables (a,b,c). La couleur des points dépend de la valeur de misfit obtenue pour le modèle calculé.

Conclusion partielle

Dans ce chapitre, on présente une méthode d'inversion des paramètres poroélastiques. À partir de données sismiques macro-échelles (sismogrammes), on peut déterminer des cartes de paramètres macro-échelles (vitesses, atténuations et masse volumique) par différentes méthodes (FWI, tomographie des temps d'arrivées...), c'est la première étape d'inversion.. Ensuite, dans la seconde étape, grâce à une méthode d'optimisation semi-globale (algorithme de voisinage), on peut déterminer les paramètres poroélastiques micro-échelles.

Par une analyse de sensibilité, on montre qu'en fixant certains paramètres (par exemple, ceux de la phase fluide et de la phase solide), on peut inverser assez précisément quelques paramètres poreux même avec peu de données (seulement les vitesses V_P et V_S par exemple). On peut également déterminer certains paramètres de la phase fluide si on connaît le milieu encaissant. En revanche, pour déterminer la saturation en eau par exemple, il est préférable de connaître Q_P pour avoir une meilleure estimation.

On applique ensuite la méthode de downscaling sur deux jeux de données synthétiques pour des applications très différentes. Dans le modèle de réservoir, on calcule des données synthétiques acoustiques et poroélastiques que l'on inverse par FWI acoustique et élastique respectivement. À partir des cartes de V_P et V_S obtenues, on estime les paramètres du squelette de la couche réservoir et des couches encaissantes. Ensuite, une injection de vapeur change les caractéristiques de la phase fluide dans la couche réservoir et on peut déterminer le changement de V_P par inversion différentielle puis les valeurs des variations des paramètres fluides par downscaling. On retrouve bien la répartition géométrique des nouveaux fluides injectés et leur nature à condition de bien connaître le milieu encaissant (phase solide et squelette), ce qui est le cas ici grâce aux informations de puits.

Dans le second exemple, on s'est intéressé à un milieu de subsurface partiellement saturé en eau. Le milieu est stratifié et une analyse en tomographie des temps d'arrivées fournit une image de V_P basse fréquence. Le downscaling effectué ensuite procure une estimation correcte de la saturation en eau mais moins bonne pour la porosité. En effet, des erreurs de 20% sur l'estimation de V_P sont dramatiques pour l'estimation de ϕ et V_1 conjointement, l'optimisation converge alors vers des minima locaux. En revanche, l'ajout des informations de vitesses des ondes S et surtout des atténuations permet de converger vers les minima globaux. D'autre part, l'estimation des paramètres du squelette (K_D , G_D et ϕ) et de la saturation V_1 à partir des données réelles fournit des plages de valeurs réduites et cohérentes.

Dans les deux exemples d'inversion décrits dans ce chapitre, les paramètres macro-échelles utilisés pour le downscaling sont les vitesses des ondes P et S. L'analyse de sensibilité a montré que l'utilisation des facteurs de qualité était cruciale dans certaines configurations. D'autres attributs sismiques peuvent également être utilisés (coefficients de réflexion AVO...) et d'autres paramétrisations peuvent aussi être envisagées (impédances, coefficients de Lamé...) pour augmenter la sensibilité de certains paramètres poroélastiques. La figure 4.35 résume ces considérations. Avseth *et al.* (2005) montrent en effet que suivant la paramétrisation macro-échelle (vitesses, impédances, rapports de vitesses...), la discrimination des paramètres micro-échelles (saturation, type de fluide...) est bonne pour des vitesses faibles et moins bonne quand le milieu devient plus compact (vitesses fortes); V_S n'est plus utile dans ce cas-là.

D'autre part, les variations fréquentielles des paramètres micro et macro-échelles dans certains milieux (double porosité, partiellement saturés, voir chapitre 3) nécessiteraient d'une

part, d'utiliser des méthodes de downscaling cas-dépendantes fondées sur les relations de Biot-Gassmann généralisées et d'autre part, de considérer les estimations des paramètres poroélastiques à plusieurs fréquences, si les vitesses sont dispersives par exemple. Enfin, dans les travaux de Garambois *et al.* (2002) d'où sont tirés le modèle synthétique de subsurface, d'autres mesures géophysiques sont prises en compte pour la validation des estimations. Il est envisageable d'intégrer directement ces données dans le processus de downscaling via une fonction misfit unique pour mieux contraindre l'optimisation. L'inversion conjointe de données sismiques et électromagnétiques ou électriques peuvent apporter une meilleure estimation des paramètres poroélastiques auxquels sont sensibles ces méthodes/physiques différentes.

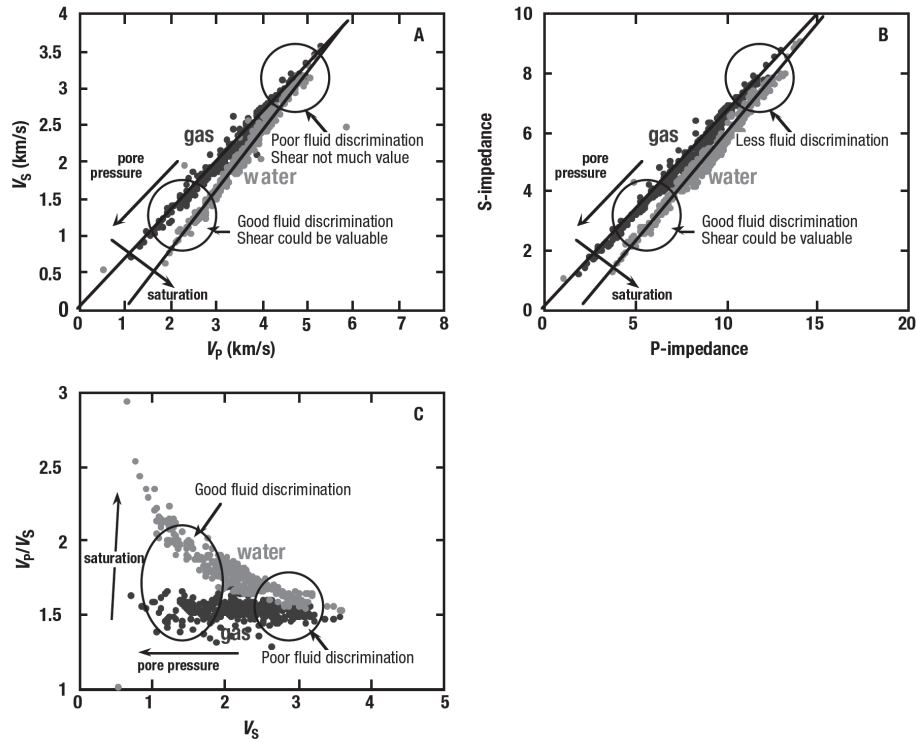


FIGURE 4.35 – Discrimination de la saturation et de la pression de pore suivant le type de fluide saturant (eau ou air) dans un échantillon de grès pour différents domaines de paramétrisation. (A) V_P et V_S , (B) Impédances des ondes P et S ($I_P = \rho V_P$ et $I_S = \rho V_S$) et (C) Rapport V_P/V_S et V_S . Figure tirée de Avseth *et al.* (2005).

Conclusions et perspectives

Conclusions générales

J'ai abordé dans cette thèse l'étude de la propagation des ondes sismiques dans les milieux multiphasiques sous trois angles :

- l'aspect théorique de la description physique de ces milieux et des techniques d'homogénéisation,
- la méthode numérique utilisée pour calculer la propagation des ondes sismiques dans ces milieux en deux dimensions,
- l'approche inverse qui vise à caractériser les paramètres poroélastiques à partir d'observables sismiques.

Homogénéisation des milieux multiphasiques : dépendance fréquentielle

Le chapitre 1 traite de la description physique des milieux biphasiques et décrit la théorie de la poroélastodynamique ainsi que les différents types d'ondes en présence et leurs propriétés. Fondée sur les travaux de Gassmann (1951) et Biot (1956), reformulée par Pride *et al.* (1992), la description mélange définitions théoriques et empiriques pour aboutir à un modèle homogénéisé défini par sept paramètres, avec quatre modules mécaniques et trois termes inertiels. Un seul terme, décrivant les interactions entre phases fluides et solides, dépend de la fréquence. En plus des ondes "classiques" de l'élastodynamique (P et S), une onde de compression lente (ou onde de Biot) est solution du système différentiel ainsi défini ; cette onde a un comportement macroscopique fortement dispersif.

Ce premier modèle d'homogénéisation décrit des milieux poreux saturés avec une phase solide homogène et isotrope. Cependant, il ne permet pas d'expliquer les atténuations et les dispersions de vitesses observées dans les milieux réels. Pour cela, les modèles plus complexes utilisés dans le chapitre 3 peuvent être plus appropriés. En effet, la prise en compte des écoulements de fluides induits par le passage des ondes à l'échelle mésoscopique permet de mieux modéliser les atténuations et les dispersions. Les milieux à fluides biphasiques ou les milieux double porosité peuvent être homogénéisés sur un volume élémentaire représentatif pour aboutir à une théorie de Biot-Gassmann généralisée. Ainsi par l'utilisation de modules mécaniques équivalents qui sont complexes et dépendants de la fréquence, on peut calculer la propagation des ondes sismiques dans des milieux partiellement saturés, dans des milieux fracturés ou non consolidés. De la même façon, par analogie avec des phénomènes visco-élastiques, on peut construire des modules mécaniques complexes pour ajouter des atténuations empiriques.

Ces modèles complexes engendrent des paramètres macro-échelles (vitesses et atténuations des ondes P, S et Biot) qui sont fortement dépendants de la fréquence. La description microscopique nécessite de définir également un paramètre géométrique (taille des inclusions d'une phase dans l'autre) qui a une influence sur les comportements des paramètres macro-échelles et notamment sur leur dispersion.

Propagation des ondes sismiques dans les milieux poreux multiphasiques

Le chapitre 2 aborde les méthodes numériques permettant la résolution des équations de la poroélastodynamique. La propagation des ondes sismiques est décrite par le système d'équations différentielles de Biot-Gassmann (généralisé ou non). Comme plusieurs paramètres dépendent de la fréquence, le choix s'est naturellement porté vers une résolution dans le domaine fréquence-espace, ce qui permet de résoudre le système sans approximation sur la rhéologie. La discrétisation spatiale a été réalisée avec une méthode d'éléments finis discontinus qui permettent, grâce leur forte adaptivité (taille des éléments et ordres d'interpolations peuvent varier d'un élément à l'autre), de prendre en compte des milieux 2D hétérogènes avec des interfaces complexes. La modélisation de la propagation des ondes dans ces milieux poreux plus ou moins complexes est donc exacte, aux approximations de discrétisation numérique près.

Les exemples de simulations dans des milieux réalistes (chapitre 2) ont montré l'intérêt d'utiliser des modèles poroélastiques. Dans le chapitre 3, les exemples de milieux non saturés, double porosité et visco-poroélastiques, montrent l'importance du choix du type de modèle. En effet, en comparant avec des modèles équivalents calculés par moyennes classiques, j'ai montré que les formes d'ondes obtenues étaient radicalement différentes. Par contre, le paramètre géométrique (taille des inclusions sphériques d'une phase dans l'autre) utilisé dans chaque description des milieux complexes, n'a que peu d'influence sur les formes d'ondes (même s'il en a sur les paramètres macroscopiques). Ainsi, suivant le modèle utilisé (approximation par moyennes ou prise en compte de toutes les interactions), les formes d'ondes sont très différentes. Je souligne ainsi l'importance de bien prendre en compte l'ensemble des interactions dans le processus d'homogénéisation des milieux complexes.

Inversion des paramètres poroélastiques

Le chapitre 4 présente une méthode d'inversion des paramètres poroélastiques en deux étapes. La première étape consiste à inverser les données issues des sismogrammes (temps d'arrivées, formes d'ondes...) pour fournir des paramètres macro-échelles (vitesses de propagation, atténuations...) sous la forme de cartes de valeurs 2D. La seconde étape d'inversion passe des propriétés macro-échelles aux paramètres poroélastiques micro-échelles par optimisation semi-globale. En effet, si la première étape d'inversion utilise des algorithmes d'optimisation locale linéarisée (inversion des formes d'ondes complètes, tomographie...), la seconde étape emploie un algorithme de voisinage qui permet d'échantillonner tout l'espace des modèles et de converger vers les principaux minima de la fonction coût. L'utilisation de cette méthode, dérivée de la recherche sur grille, est possible grâce à la rapidité et au faible coût numérique du modèle direct, qui consiste ici à calculer une dizaine de relations analytiques définies par les relations de Biot-Gassmann (reliant les paramètres micro- et macro-échelles).

L'analyse de sensibilité a montré que l'on pouvait inverser avec précision les paramètres du squelette poroélastique (porosité, consolidation...), y compris si l'on dispose uniquement des

vitesse de propagation. De même, la nature du fluide saturant peut être déterminée à partir des vitesses de propagation si le milieu encaissant est connu. En revanche, pour retrouver la saturation en fluide, il est préférable de connaître les atténuations (à la fréquence dominante de la source). J'ai appliqué ce type d'inversion en deux étapes sur des applications synthétiques réalistes (suivi temporel de réservoir et hydrogéophysique de subsurface). Les résultats obtenus sont encourageants et démontrent qu'à partir de données estimées par des méthodes classiques d'imagerie, on peut remonter à certains paramètres poroélastiques constitutifs. Un exemple de caractérisation sur des données réelles acquises en subsurface a également montré la précision que l'on peut envisager pour l'estimation des paramètres poroélastiques sur les premiers mètres du sous-sol, zone importante de transfert des fluides au niveau environnemental.

Perspectives

Modélisation des milieux multiphasiques : description physique et simulation de la propagation des ondes sismiques

Il a été montré tout au long de cette thèse que la description physique des milieux réels avait une influence notable sur la modélisation de la propagation des ondes. En effet, la prise en compte de la complexité de ces milieux est cruciale à des échelles de subsurface où les hétérogénéités ont une influence sur la propagation et notamment sur les atténuations et les dispersions des ondes. Grâce aux méthodes d'homogénéisation qui permettent de se ramener à une théorie de Biot-Gassmann généralisée avec des modules complexes et fréquemment dépendants, on peut envisager la modélisation de milieux de plus en plus complexes (plusieurs phases poreuses associées à de la saturation partielle ou à des phénomènes visco-poroélastiques multiples). Pour cela, il est nécessaire que les théories d'homogénéisation permettent de se ramener à une théorie de la poroélasticité de Biot-Gassmann généralisée.

Les exemples de simulation de propagation d'ondes présentés dans ce travail ont été réalisés sur des milieux stratifiés assez simples. Grâce à l'approche numérique en éléments finis discontinus, on pourra réaliser des simulations dans des milieux réalistes variables latéralement et ainsi faire des modélisations de propagation d'ondes pour des applications variées : glissements de terrain, réservoirs, effets de site... De plus, l'étude de l'influence des modèles sur d'autres paramètres macroscopiques, par exemple les coefficients de réflexion calculés par AVO, devra être réalisée afin de déterminer quels attributs sismiques sont utilisables pour caractériser tel ou tel type de milieu multiphasique. Une perspective logique concerne l'extension du code de modélisation aux équations de Maxwell, ceci afin de pouvoir calculer des conversions sismo-électromagnétiques qui pourraient permettre d'avoir une vision plus large des propriétés des milieux poreux (Garambois & Dietrich, 2002). Enfin, pour bien modéliser les milieux réels hétérogènes, il est évident qu'il faudra étendre ces modélisations aux milieux trois dimensions. L'utilisation d'autres méthodes numériques (domaine temporel ou solveurs itératifs) sera vraisemblablement nécessaire à cause du coût numérique qui s'avérera prohibitif pour des applications 3D.

Caractérisation des paramètres constitutifs des milieux multiphasiques

Méthodes

L'inversion des paramètres poroélastiques a été réalisée dans les milieux biphasiques simples (saturés et simple porosité) par une méthode en deux étapes : des données aux attributs sismiques macro-échelles puis des attributs aux paramètres poroélastiques micro-échelles. Les deux étapes d'optimisation utilisent des approches différentes : optimisation locale linéarisée pour la première et optimisation semi-globale non linéaire pour la seconde.

L'inversion en une seule étape qui consiste à inverser certains paramètres poroélastiques par optimisation locale à partir des données de formes d'ondes complètes a été abordée récemment. Morency *et al.* (2009) ont calculé les noyaux de sensibilité (produits des champs directs et adjoints) pour différentes paramétrisations et De Barros *et al.* (2010) ont réalisé des tests d'inversions des formes d'ondes complètes en milieu poroélastique stratifié. Ces travaux ont montré toute la difficulté de l'approche d'inversion des formes d'ondes complètes poroélastiques, certains paramètres à inverser étant fortement couplés ou peu sensibles (la perméabilité notamment). De plus, en approximation élastique (Brossier, 2009), le problème est déjà mal-conditionné et fortement sous-déterminé. En passant de 3 ou 5 (V_P , V_S et ρ et Q_P et Q_S en visco-élastique) paramètres élastiques à inverser à, au minimum, 10 paramètres, l'inversion FWI poroélastique est encore plus difficile. Cependant, on a vu que la sous-détermination du système pouvait être compensée par la connaissance a-priori des paramètres des phases solides ou fluides par exemple. La connaissance de certains paramètres peut venir de données de puits ou en ajoutant de l'a-priori. Une approche différentielle, qui vise à caractériser uniquement les paramètres qui varient au cours du temps (les fluides lors d'un monitoring de réservoir, par exemple), peut également fournir cette connaissance a-priori du milieu poroélastique et mieux contraindre l'inversion.

En effet, comme l'ont montré De Barros *et al.* (2010) (voir aussi l'annexe B et Morency *et al.* (2011) et l'exemple de monitoring de réservoir (partie 4.4.1 du chapitre 4), l'approche différentielle peut également être une solution pour inverser certains paramètres poroélastiques qui varient au cours du temps (nature de la phase fluide et saturation notamment). Le monitoring de réservoir (suivi d'injection de CO_2 ou de pompage d'aquifères), est une des applications les plus évidentes, mais le suivi de la saturation en eau dans les glissements de terrain, ou les problèmes de pollution de nappes, sont également concernés par ce type de caractérisation. Les techniques d'imagerie différentielle devront s'appliquer aux étapes d'inversion des données (FWI, tomographie...), que l'on considère une caractérisation en une ou deux étapes. Enfin, dans le chapitre 4, il a été confirmé l'importance de l'utilisation des atténuations pour l'étape de downscaling poroélastique. Des efforts sur l'inversion visco-élastique des formes d'ondes complètes ou sur d'autres méthodes alternatives permettant d'estimer au mieux les atténuations et les dispersions, doivent donc être faits.

Une seconde étape d'amélioration de la caractérisation des paramètres poroélastiques passe par la prise en compte des milieux multiphasiques complexes. En effet, j'ai montré, dans le chapitre 3, que la propagation des ondes sismiques dans les milieux non saturés ou double porosité est fortement modifiée par l'introduction d'une description plus évoluée de ces milieux. Les milieux réels ayant ces caractéristiques ne pourront donc être correctement caractérisés que par l'utilisation de rhéologies correctes. La seconde étape d'inversion utilisée dans cette thèse devra donc être étendue à ces milieux complexes. Cela ne posera pas de problème numérique,

le problème direct étant encore analytique et donc rapide et peu coûteux. En revanche, des études de sensibilité devront être réalisées avec précision afin de déterminer quels paramètres sont inversibles et en fonction de quelles données. Là aussi, l'utilisation des atténuations sera cruciale, ces milieux complexes se distinguant par de fortes atténuations et dispersions des ondes. De plus, l'utilisation de données à plusieurs fréquences permettra de mieux rendre compte de ces phénomènes dépendants de la fréquence et ainsi de mieux contraindre l'optimisation.

Enfin, toute cette thèse s'est concentrée sur l'utilisation des ondes sismiques dans les milieux poroélastiques. Cependant, d'autres phénomènes géophysiques sont également sensibles aux propriétés des milieux multiphasiques. Les phénomènes électriques, comme la résistivité ou les phénomènes de polarisation spontanée, sont sensibles aux teneurs en eau ou aux écoulements de fluides, respectivement. Les ondes électromagnétiques (GPR, CSEM) peuvent apporter des informations prépondérantes pour l'estimation des paramètres fluides. De même, l'utilisation des conversions sismo-électromagnétiques est prometteuse, l'onde de Biot par exemple, ayant une plus forte amplitude sur les composantes des champs électriques (Garambois, communication personnelle). La méthode de downscaling utilisée dans cette thèse pourrait donc être étendue à d'autres phénomènes physiques. Par la prise en compte des contributions de chaque phénomène dans une fonction coût unique, l'inversion conjointe de données d'origines variées permettra de mieux contraindre les paramètres des milieux poreux, notamment ceux peu sensibles aux ondes sismiques, comme la perméabilité par exemple.

Données et applications

L'acquisition de données plus variées est nécessaire pour mieux caractériser les milieux multiphasiques. En effet, l'estimation des atténuations des ondes sismiques par une première étape d'inversion est cruciale pour déterminer la saturation. Des mesures d'autres phénomènes physiques sont également requises pour les inversions conjointes. Comme chaque méthode agit à des échelles (profondeur de pénétration et résolution) variées, il faudra bien corrélérer les différentes observables géophysiques.

Des expériences de laboratoire bien contraintes pourraient permettre de mieux apprécier les potentialités des inversions conjointes. En désignant un protocole d'expérimentation contrôlé et en mesurant différents phénomènes physiques (sismique, électrique, électromagnétique, mécanique statique...) dans un milieu multiphasique bien connu, on pourra estimer quel peut être l'apport de chaque méthode géophysique pour une meilleure caractérisation des propriétés des milieux poreux.

L'application de cette méthode sur différents milieux poreux réels peut ensuite être envisagée. Par exemple, on pourra considérer un glissement de terrain de type argileux dont la cinétique est très sensible aux variations de teneur en eau et dont les structures géologiques sont en général assez simples. Après une caractérisation complète de la zone en glissement et du substratum par des méthodes géophysiques (sismique haute résolution, tomographie électrique...), on pourra effectuer une étape de downscaling conjointe en utilisant toutes les données disponibles. La précision de cette seconde étape d'inversion dépend fortement de la qualité des résultats de la première étape d'inversion. Par exemple, l'imagerie sismique devra apporter des informations haute résolution par une inversion des formes d'ondes complètes, ce qui nécessite un dispositif de sources et de récepteurs denses et avec une grande illumination (géophones situés à grand offsets ou en forages).

La première étape de caractérisation générale du milieu (porosité, modules du squelette...) tiendra compte de toutes les observables géophysiques et d'informations a-priori (inclinomètres donnant la profondeur de la surface de rupture, caractérisation de la minéralogie et des modules mécaniques de l'argile par des essais de laboratoire...). Un suivi temporel pourra ensuite être effectué avec des expériences d'imagerie sismique répétables et des techniques d'inversion différentielle, pour mettre en évidence des variations de saturation (l'étape de downscaling concernera donc uniquement la saturation ou la phase fluide saturante). La cinétique du mouvement et l'évolution des paramètres poroélastiques pourront alors être corrélés. On peut également envisager ce type d'expérience de terrain pour le monitoring de réservoirs (eau, CO_2) avec une première étape de caractérisation du réservoir (porosité, consolidation...) et un suivi temporel ensuite, au cours de l'injection ou du pompage.

L'utilisation des données fournies par la sonde HPPP (voir figure 1) est également une piste intéressante. En effet, si l'estimation spatiale et temporelle du signal source est réalisable afin de déconvoluer les signaux observés à quelques longueurs d'ondes de l'étalement de la source, la caractérisation du milieu poreux encaissant peut être grandement améliorée en couplant mesures "classiques" (géophones) dans des forages voisins, et mesures de déformations et de pression fluide en champ proche. En résolvant le problème de répétabilité de la source de pression impulsive, des études différentielles permettront d'estimer les propriétés de ces milieux poreux fracturés. En revanche, il faudra probablement envisager l'extension de la modélisation de la propagation d'ondes aux milieux fracturés anisotropes, ce qui est rendu possible par l'approche en éléments finis discontinus utilisée ici.

Finalement, ce type de travaux visant à reconstruire les caractéristiques des milieux multiphasiques présente des applications environnementales et de réservoir nombreuses :

- le suivi de la saturation en eau dans les glissements de terrain ou dans les argiles soumises aux phénomènes de retrait-gonflement, la cinétique de ces phénomènes dépendant fortement de la teneur en eau,
- l'estimation des paramètres des aquifères (la porosité donne des informations sur la quantité de fluide et la perméabilité sur sa capacité à circuler),
- l'estimation et le suivi des pollutions de nappes, par caractérisation du type de fluide saturant,
- les caractérisations (porosité, perméabilité) des réservoirs d'hydrocarbures pour améliorer les capacités de pompage de gaz et de pétrole,
- la caractérisation et le monitoring des réservoirs naturels et des encaissants lors des stockages de CO_2 ou de déchets radioactifs.

Bibliographie

- Adler, P., Jacquin, C. & Thovert, J.-F. (1992). The formation factor of reconstructed porous media. *Water Resources Research*, 28:1571–1576.
- Aki, K. & Richards, P. (1980). *Quantitative Seismology : Theory and Methods*. W. H. Freeman & Co, San Francisco.
- Amestoy, P. R., Duff, I. S. & L'Excellent, J. Y. (2000). Multifrontal parallel distributed symmetric and unsymmetric solvers. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 184:501–520.
- Amestoy, P. R., Guermouche, A., L'Excellent, J. Y. & Pralet, S. (2006). Hybrid scheduling for the parallel solution of linear systems. *Parallel Computing*, 32:136–156.
- Asnaashari, A., Brossier, R., Garambois, S., Audebert, F., Thore, P. & Virieux, J. (2011). Sensitivity analysis of time-lapse images obtained by differential waveform inversion with respect to reference model. *SEG Technical Program Expanded Abstracts*, 30(1):2482–2486.
- Auriault, J.-L., Borne, L. & Chambon, R. (1985). Dynamics of porous saturated media, checking of the generalized law of Darcy. *Journal of Acoustical Society of America*, 77(5):1641–1650.
- Auriault, J.-L. & Boutin, C. (1994). Deformable porous media with double porosity - III : acoustics. *Transport in Porous Media*, 14:143–162.
- Avseth, P., Mukerji, T. & Mavko, G. (2005). *Quantitative Seismic Interpretation : Applying Rock Physics Tools to Reduce Interpretation Risk*. Cambridge University Press, Cambridge, UK.
- Bachrach, R. (2006). Joint estimation of porosity and saturation using stochastic rock-physics modeling. *Geophysics*, 71(5):53–63.
- Bachrach, R., Dvorkin, J. & Nur, A. (1998a). High-resolution shallow-seismic experiments in sand, part I : water table, fluid flow, and saturation. *Geophysics*, 63(4):1225–1233.
- Bachrach, R., Dvorkin, J. & Nur, A. (1998b). High-resolution shallow-seismic experiments in sand, part II : velocities in shallow unconsolidated sand. *Geophysics*, 63(4):1234–1240.
- Bachrach, R., Dvorkin, J. & Nur, A. (1998c). Seismic velocities and Poisson's ratio of shallow unconsolidated sands. *Geophysics*, 65(2):559–564.
- Batzle, M. & Wang, Z. (1992). Seismic properties of pore fluids. *Geophysics*, 57(11):1396–1408.

BIBLIOGRAPHIE

- Bear, J. (1972). *Dynamics of fluids in porous media / Jacob Bear*. American Elsevier, New-York :.
- BenJemaa, M., Glinsky-Olivier, N., Cruz-Atienza, V. M. & Virieux, J. (2009). 3D Dynamic rupture simulations by a finite volume method. *Geophys. J. Int.*, 178:541–560.
- BenJemaa, M., Glinsky-Olivier, N., Cruz-Atienza, V. M., Virieux, J. & Piperno, S. (2007). Dynamic non-planar crack rupture by a finite volume method. *Geophysical Journal International*, 171:271–285.
- Berenger, J.-P. (1994). A perfectly matched layer for absorption of electromagnetic waves. *Journal of Computational Physics*, 114:185–200.
- Berryman, J. (1980a). Long-wavelength propagation in composite elastic materials I. spherical inclusions. *Journal of Acoustical Society of America*, 68:1809–1819.
- Berryman, J. (1980b). Long-wavelength propagation in composite elastic materials II. ellipsoidal inclusions. *Journal of Acoustical Society of America*, 68:1820–1831.
- Berryman, J. (1995). *Mixture theories for rock properties in Rock Physics and Phase Relations, A Handbook of Physical Constants*. AGU Ref. Shelf, vol. 2, edited by Ahrens, T.J., AGU, Washington.
- Berryman, J. (1999). Origin of Gassmann's equations. Rapport technique 102, Stanford Exploration Project.
- Berryman, J., Berge, P. & Bonner, B. (2000). Transformation of seismic velocity data to extract porosity and saturation values for rocks. *Journal of Acoustical Society of America*, 107(6):3018–3027.
- Berryman, J., Berge, P. & Bonner, B. (2002). Estimating rock porosity and fluid saturation using only seismic velocities. *Geophysics*, 67:391–404.
- Berryman, J. & Pride, S. (1998). Connecting theory to experiment in poroelasticity. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 46(4):719–747.
- Berryman, J. & Wang, H. (1995). The elastic coefficients of double-porosity models for fluid transport in jointed rocks. *Journal of Geophysical Research*, 100:24611–24627.
- Berryman, J. & Wang, H. (2000). Elastic wave propagation and attenuation in a double-porosity dual permeability medium. *International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences*, 37:63–78.
- Biot, M. (1956). Theory of propagation of elastic waves in a fluid-saturated porous solid. I. low-frequency range, II. higher frequency range. *Journal of Acoustical Society of America*, 28:168–191.
- Biot, M. (1962). Mechanics of deformation and acoustic propagation in porous media. *Journal of Applied Physics*, pages 1482–1498.
- Biot, M. & Willis, D. (1957). The elastic coefficients of the theory of consolidation. *Journal of Applied Mechanics*, 24:594–601.

- Bordes, C. (2005). *Etude expérimentale des phénomènes transitoires sismoélectromagnétiques*. Phd, LGIT, Université Joseph Fourier, Grenoble.
- Bosch, M. (1999). Lithologic tomography : From plural geophysical data to lithology estimation. *Journal of Geophysical Research*, 104(B1):749–766.
- Bosch, M. (2004). The optimization approach to lithological tomography : Combining seismic data and petrophysics for porosity prediction. *Geophysics*, 69:1272–1282.
- Bouchon, M. (1981). A simple method to calculate Green's functions for elastic layered media. *Bulletin of the Seismological Society of America*, 71(4):959–971.
- Bourbié, T., Coussy, O. & Zinszner, B. (1986). *Acoustique des milieux poreux*, volume 27. Editions Technip, Institut Francais du pétrole.
- Bourbié, T., Coussy, O. & Zinszner, B. (1987). *Acoustics of Porous Media*. Editions Technip, Institut Francais du pétrole.
- Boutin, C., Bonnet, G. & Bard, P. (1987). Green functions and associated source in infinite and stratified poroelastic media. *Geophysical Journal of the Royal Astronomical Society*, 90:521–550.
- Brandt, H. (1955). A study of the speed of sound in porous granular media. *Journal of Applied Mechanics*, 22:479–486.
- Bretaudeau, F., Brossier, R., Leparoux, D., Abraham, O. & Virieux, J. (2011). 2D elastic full waveform imaging of the near surface : Application to a physical scale model. *Near Surface Geophysics*, page in press.
- Brie, A., Pampuri, F., Marsala, A. & Meazza, O. (1995). Shear sonic interpretation in gas-bearing sands. *SPE Annual Technical Conf. 30595*, pages 701–710.
- Brossier, R. (2009). *Imagerie sismique à deux dimensions des milieux visco-élastiques par inversion des formes d'onde : développements méthodologiques et applications*. Thèse de doctorat, Université de Nice-Sophia-Antipolis.
- Brossier, R. (2011). Two-dimensional frequency-domain visco-elastic full waveform inversion : Parallel algorithms, optimization and performance. *Computers & Geosciences*, 37(4):444 – 455.
- Brossier, R., Etienne, V., Operto, S. & Virieux, J. (2010). Frequency-domain numerical modelling of visco-acoustic waves based on finite-difference and finite-element discontinuous galerkin methods. In Dissanayake, D. W., éditeur : *Acoustic Waves*, pages 125–158. SCIYO.
- Brossier, R., Operto, S. & Virieux, J. (2009a). 2D elastic frequency-domain full-waveform inversion for imaging complex onshore structures. In *Expanded Abstracts*, page U019. EAGE.
- Brossier, R., Operto, S. & Virieux, J. (2009b). Seismic imaging of complex onshore structures by 2D elastic frequency-domain full-waveform inversion. *Geophysics*, 74(6):WCC63–WCC76.
- Brossier, R., Virieux, J. & Operto, S. (2008a). 2D frequency-domain elastic full-waveform inversion using a $P0$ finite volume forward problem. In *Expanded Abstracts, 78th Annual SEG Conference & Exhibition, Las Vegas*. Society of Exploration Geophysics.

- Brossier, R., Virieux, J. & Operto, S. (2008b). Parsimonious finite-volume frequency-domain method for 2-D P-SV-wave modelling. *Geophysical Journal International*, 175(2):541–559.
- Brown, R. (1980). Connection between formation factor for electrical resistivity and fluid-solid coupling factor for Biot's equation in fluid filled porous media. *Geophysics*, 45(8):1269–1275.
- Brown, R. & Korringa, J. (1975). On the dependence of the elastic properties of a porous rock on the compressibility of the pore fluid. *Geophysics*, 40:608–616.
- Burridge, R. & Keller, J. (1981). Poroelasticity equations derived from microstructure. *Journal of Acoustical Society of America*, 70(4):1140–1146.
- Burridge, R. & Vargas, C. (1979). The fundamental solution in dynamic poroelasticity. *Geophysical Journal of the Royal Astronomical Society*, 58:61–90.
- Cadoret, T. (1993). *Effet de la saturation eau/gaz sur les propriétés acoustiques des roches*. Thèse de doctorat, Université de Paris VII, Paris.
- Carcione, J. (1996). Wave propagation in anisotropic, saturated porous media : Plane-wave theory and numerical simulation. *Journal of Acoustical Society of America*, 99(5):2655–2666.
- Carcione, J. (1998). Viscoelastic rheologies for modelling wave propagation in porous media. *Geophysical Prospecting*, 46:249–270.
- Carcione, J., Morency, C. & Santos, J. (2010). Computational poroelasticity - a review. *Geophysics*, 75(5):229–243.
- Carcione, J., Picotti, S., Gei, D. & Rossi, G. (2006). Physics and seismic modeling for monitoring CO₂ storage. *Pure applied Geophysics*, 163:175–207.
- Carcione, J. M. & Goode, G. Q. (1995). Some aspects of the physics and numerical modeling of Biot compressional waves. *Journal of Computational Acoustics*, 154:261–272.
- Castagna, J. P., Batzle, M. L. & Kan, T. K. (1993). Rock physics - the link between rock properties and avo response, in offset-dependent reflectivity-theory and practice of avo analysis, edited by Castagna J.P. and Backus M.M.
- Chapman, C. (2004). *Fundamentals of seismic waves propagation*. Cambridge University Press, Cambridge, England.
- Chotiros, N. (2002). An inversion for Biot parameters in a water-saturated sand. *Journal of Acoustical Society of America*, 112(5):1853–1868.
- Chotiros, N. & Isakson, M. (2004). A broadband model of sandy ocean sediments : Biot-stoll with contact squirt flow and shear drag. *Journal of Acoustical Society of America*, 116(4):2011–2022.
- Ciz, R. & Shapiro, S. (2007). Generalization of Gassmann equations for porous media saturated with a solid material. *Geophysics*, 72:A75–A79.
- Dai, N., Vafidis, A. & Kanasewich, E. (1995). Wave propagation in heterogeneous porous media : A velocity-stress, finite-difference method. *Geophysics*, 60(2):327–340.

- De Barros, L. (2007). *Sensibilité et inversion des formes d'ondes sismiques en milieu poreux stratifié*. Thèse de doctorat, Laboratoire de Géophysique Interne et Tectonophysique, Université J. Fourier, Grenoble I.
- De Barros, L. & Dietrich, M. (2008). Perturbations of the seismic reflectivity of a fluid-saturated depth-dependent poroelastic medium. *Journal of Acoustical Society of America*, 123(3):1409–1420.
- De Barros, L., Dietrich, M. & Valette, B. (2010). Full waveform inversion of seismic waves reflected in a stratified porous medium. *Geophysical Journal International*, 182(3):1543–1556.
- De Barros, L., Dupuy, B., O'Brien, G., Virieux, J. & Garambois, S. (2011). *Using a poroelastic theory to reconstruct subsurface properties : numerical investigation*. ed. Dr K. Masaki, In press.
- de la Puente, J., Dumbser, M., Käser, M. & Igel, H. (2008). Discontinuous Galerkin methods for wave propagation in poroelastic media. *Geophysics*, 73(5):77–97.
- Demagnet, D., Pirard, E., Renardy, F. & Jongmans, D. (2001). Application and processing of geophysical images for mapping faults. *Computers and Geosciences*, 27:1031–1037.
- Denli, H. & Huang, L. (2009). Double-difference elastic waveform tomography in the time domain. *SEG Technical Program Expanded Abstracts*, 28(1):2302–2306.
- Deresiewicz, H. (1962). The effect of boundaries on wave propagation in a liquid-filled porous solid, iv. surface waves in a half-space. *Bulletin of the Seismological Society of America*, 52:627–638.
- Dines, K. & Lytle, R. (1979). Computerized geophysical tomography. *Proceedings of the IEEE*, 67(7):1065 – 1073.
- Domenico, S. N. (1976). Effect of brine-gas mixture on velocity in an unconsolidated sand reservoir. *Geophysics*, 41:882–894.
- Domenico, S. N. (1977). Elastic properties of unconsolidated porous reservoirs. *Geophysics*, 42:1339–1368.
- Drossaert, F. H. & Giannopoulos, A. (2007). A nonsplit complex frequency-shifted PML based on recursive integration for FDTD modeling of elastic waves. *Geophysics*, 72(2):T9–T17.
- Dupuy, B., De Barros, L., Garambois, S. & Virieux, J. (2011). Wave propagation in heterogeneous porous media formulated in the frequency-space domain using a discontinuous Galerkin method. *Geophysics*, 76(4):N13–N28.
- Dutta, A. J. & Odé, H. (1979). Attenuation and dispersion of compressional waves in fluid-filled porous rocks with partial gas saturation (white model)-part i : Biot theory. *Geophysics*, 44(11):1777–1788.
- Dvorkin, J., Mavko, G. & Nur, A. (1995). Squirt flow in fully saturated rocks. *Geophysics*, 60:97–107.

- Dvorkin, J. & Nur, A. (1993). Dynamic poroelasticity : A unified model with the squirt and the Biot mechanisms. *Geophysics*, 58(4):524–533.
- Dvorkin, J. & Nur, A. (1996). Elasticity of high porosity sandstones : theory for two north sea datasets. *Geophysics*, 61:1363–1370.
- Edelman, I. & Wilmanski, K. (2002). Asymptotic analysis of surface waves at vacuum/porous medium and liquid/porous medium interfaces. *Continuum Mechanics and Thermodynamics*, 14:25–44.
- Etienne, V. (2011). *Modélisation de la propagation d’ondes sismiques par éléments finis discontinus et inversion des formes d’onde dans les milieux élastiques à trois dimensions*. Thèse de doctorat, Université de Nice-Sophia-Antipolis, Sophia-Antipolis.
- Etienne, V., Brossier, R., Operto, S. & Virieux, J. (2008). A 3D parsimonious Finite-Volume Frequency-Domain method for elastic wave modelling. In *Expanded Abstracts, 70th Annual EAGE Conference & Exhibition, Rome*. EAGE.
- Etienne, V., Virieux, J. & Operto, S. (2009). A massively parallel time domain discontinuous Galerkin method for 3D elastic wave modeling. In *Expanded Abstracts, 79th Annual SEG Conference & Exhibition, Houston*. Society of Exploration Geophysics.
- Garambois, S. & Dietrich, M. (2002). Full waveform numerical simulations of seismoelectromagnetic wave conversions in fluid-saturated stratified porous media. *Journal of Geophysical Research*, 107:10.1029/2001JB000316.
- Garambois, S., Sénéchal, P. & Perroud, H. (2002). On the use of combined geophysical methods to assess water content and water conductivity of near-surface formations. *Journal of Hydrology*, 259:32–48.
- Gassmann, F. (1951). Über die elastizität poröser medien. *Vierteljahrsschrift der Naturforschenden Gesellschaft in Zürich*, 96:1–23.
- Gelinsky, S. & Shapiro, S. (1997). Dynamic-equivalent medium approach for thinly layered saturated sediments. *Geophysical Journal International*, 128:F1–F4.
- Gélis, C., Virieux, J. & Grandjean, G. (2007). 2D elastic waveform inversion using Born and Rytov approximations in the frequency domain. *Geophysical Journal International*, 168:605–633.
- Gholami, Y., Ribodetti, A., Operto, S., Brossier, R. & Virieux, J. (2010). Imaging of vti media by elastic frequency-domain full-waveform inversion of global offset data. *SEG Technical Program Expanded Abstracts*, 29(1):998–1002.
- Guéguen, Y. & Palciauskas, V. (1992). *Introduction à la physique des roches*. Hermann éditeurs des sciences et des arts.
- Gunning, J. & Glinisky, M. (2007). Detection of reservoir quality using bayesian seismic inversion. *Geophysics*, 72(3):37–49.
- Gurevich, B. (2003). Elastic properties of saturated porous rocks with aligned fractures. *Journal of Applied Geophysics*, 54:203–218.

- Gurevich, B. & Lopatnikov, S. (1995). Velocity and attenuation in finely layered porous rocks. *Geophysical Journal International*, 121:933–947.
- Haartsen, M. & Pride, S. (1997). Electro seismic waves from point sources in layered media. *Journal of Geophysical Research*, 102(B11):745–769.
- Han, D.-H., Nur, A. & Morgan, D. (1986). Effects of porosity and clay content on wave velocities in sandstones. *Geophysics*, 51(11):2093–2107.
- Hardin, B. O. & Richart, F. E. (1963). Elastic wave velocities in granular soils. *Journal of Soil Mechanics and Foundations Div ASCE*, 89:33–65.
- Hashin, Z. & Shtrikman, S. (1963). A variational approach to the elastic behavior of multiphase materials. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 11:127–140.
- Hebach, A., Oberhof, A. & Dahmen, N. (2004). Density of water + carbon dioxide at elevated pressures : measurements and correlation. *Journal of chemical and engineering data*, 49(4): 950–953.
- Helle, H., Pham, N. & Carcione, J. (2003). Velocity and attenuation in partially saturated rocks : poroelastic numerical experiments. *Geophysical Prospecting*, 51:551–566.
- Hesthaven, J. S. & Warburton, T. (2008). *Nodal Discontinuous Galerkin Method. Algorithms, Analysis, and Application*. Springer, New York.
- Hicks, G. J. & Pratt, R. G. (2001). Reflection waveform inversion using local descent methods : estimating attenuation and velocity over a gas-sand deposit. *Geophysics*, 66(2):598–612.
- Hill, R. (1952). The elastic behavior of a crystalline aggregate. *Proceedings of the Physical Society, London*, A65:349–354.
- Hustedt, B., Operto, S. & Virieux, J. (2004). Mixed-grid and staggered-grid finite difference methods for frequency domain acoustic wave modelling. *Geophysical Journal International*, 157:1269–1296.
- Jenkins, J., Johnson, D., Ragione, L. L. & Makse, H. (2005). Fluctuations and the effective moduli of an isotropic, random aggregate of identical, frictionless spheres. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 53:197–225.
- Johnson, D. (2001). Theory of frequency dependent acoustics in patchy-saturated porous media. *Journal of Acoustical Society of America*, 110(2):682–694.
- Johnson, D., Koplik, J. & Dashen, R. (1987). Theory of dynamic permeability and tortuosity in fluid-saturated porous media. *Journal of Fluid Mechanics.*, 176:379–402.
- Käser, M. & Dumbser, M. (2006). An Arbitrary High Order Discontinuous Galerkin Method for Elastic Waves on Unstructured Meshes I : The Two-Dimensional Isotropic Case with External Source Terms. *Geophysical Journal International*, 166:855–877.
- Kennett, B. & Kerry, N. (1979). Seismic waves in a stratified half space. *Geophysical Journal of the Royal Astronomical Society*, 57:557–583.

- Knight, R. & Dvorkin, J. (1992). Seismic and electrical properties of sandstones at low saturations. *Journal of Geophysical Research*, 97:17425–17432.
- Knight, R., Dvorkin, J. & Nur, A. (1998). Acoustic signatures of partial saturation. *Geophysics*, 63:132–138.
- Korringa, J., Brown, R. J. S., Thompson, D. D. & Runge, J. J. (1979). Self-consistent imbedding and the ellipsoidal model for porous rocks. *Journal of Geophysical Research*, 84:5591–5598.
- Lamb, H. (1904). On the propagation of tremors over the surface of an elastic solid. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London Ser., A* 203:1–42.
- Legchenko, A., Baltassat, J., Beauce, A. & Bernard, J. (2002). Nuclear magnetic resonance as a geophysical tool for hydrogeologists. *Journal of Applied Physics*, 50:21–46.
- Levander, A. R. (1988). Fourth-order finite-difference P-SV seismograms. *Geophysics*, 53(11):1425–1436.
- Liu, X., Greenhalgh, S. & Wang, Y. (2011). 2.5-d poroelastic wave modelling in double porosity media. *Geophysical Journal International*, 186:1285–1294.
- Liu, X., Greenhalgh, S. & Zhou, B. (2009). Transient solution for poro-viscoacoustic wave propagation in double porosity media and its limitations. *Geophysical Journal International*, 178:375–393.
- Malinowski, M., Operto, S. & Ribodetti, A. (2011). High-resolution seismic attenuation imaging from wide-aperture onshore data by visco-acoustic frequency-domain full waveform inversion. *Geophysical Journal International*, 186(3):1179–1204.
- Martin, R., Komatitsch, D. & Ezziani, A. (2008). An unsplit convolutional perfectly matched layer improved at grazing incidence for seismic wave propagation in poroelastic media. *Geophysics*, 73(4):51–61.
- Masson, Y. & Pride, S. (2007). Poroelastic finite difference modeling of seismic attenuation and dispersion due to mesoscopic-scale heterogeneity. *Journal of Geophysical Research*, 112(B03204).
- Masson, Y. & Pride, S. (2010). Finite-difference modeling of Biot’s poroelastic equations across all frequencies. *Geophysics*, 75(2):33–41.
- Mavko, G. & Jizba, D. (1991). Estimating grain-scale fluid effects on velocity dispersion in rocks. *Geophysics*, 56:1940–1949.
- Mavko, G., Mukerji, T. & Dvorkin, J. (2009). *The Rocks Physics Handbooks, Tools for Seismic Analysis in Porous Media ; Second Edition*. Cambridge University Press, Cambridge, UK.
- Menke, W. (1984). *Geophysical Data Analysis : Discrete Inverse Theory*. Academic Press, Inc., Orlando, USA.
- Metropolis, N. & Ulam, S. (1949). The Monte Carlo Method. *Journal of the American Statistical Association*, 44(247):335–341.

- Michalewicz, Z. (1994). *Genetic Algorithms + Data Structures = Evolution Programs*. Springer Verlag.
- Mindlin, R. D. (1949). Compliance of elastic bodies in contact. *Journal of Applied Mechanics*, 16:259–268.
- Mora, P. R. (1987). Nonlinear two-dimensional elastic inversion of multi-offset seismic data. *Geophysics*, 52:1211–1228.
- Mora, P. R. (1989). Inversion = migration + tomography. *Geophysics*, 54(12):1575–1586.
- Morency, C., Luo, Y. & Tromp, J. (2009). Finite-frequency kernels for wave propagation in porous media based upon adjoint methods. *Geophysical Journal International*, 179:1148–1168.
- Morency, C., Luo, Y. & Tromp, J. (2011). Acoustic, elastic and poroelastic simulations of CO_2 sequestration crosswell monitoring based on spectral-element and adjoint methods. *Geophysical Journal International*, 185:955–966.
- Morency, C. & Tromp, J. (2008). Spectral-element simulations of wave propagation in porous media. *Geophysical Journal International*, 175:301–345.
- Muller, T., Gurevich, B. & Lebedev, M. (2010). Seismic wave attenuation and dispersion resulting from wave-induced flow in porous rocks - a review. *Geophysics*, 75(5):147–164.
- Nagy, P. (1992). Observation of a new surface mode on a fluid-saturated permeable solid. *Applied Physics Letters*, 60:2735–2737.
- Nolla, A., Hoyer, W., Mifsud, J., Runyan, W. & Ward, M. (1963). Acoustical properties of water-filled sands. *Journal of Acoustical Society of America*, 35:1394–1408.
- Norris, A. (1993). Low-frequency dispersion and attenuation in partially saturated rocks. *Journal of Acoustical Society of America*, 94:359–370.
- Oluy, X. & Boutin, C. (2003). Acoustic wave propagation in double porosity media. *Journal of Acoustical Society of America*, 113(6):73–89.
- Operto, S., Virieux, J., Dessa, J. X. & Pascal, G. (2006). Crustal imaging from multi-fold ocean bottom seismometers data by frequency-domain full-waveform tomography : application to the eastern Nankai trough. *Journal of Geophysical Research*, 111(B09306): doi :10.1029/2005JB003835.
- Pageot, D., Operto, S., Vallée, M. & Virieux, J. (2009). Lithospheric imaging from teleseismic data by frequency-domain full-waveform tomography. In *AGU 2009 Fall Meeting, Abstract Book*, pages S31D–07 POSTER. Society of Exploration Geophysicists.
- Plessix, R.-E. (2006). A review of the adjoint-state method for computing the gradient of a functional with geophysical applications. *Geophysical Journal International*, 167(2):495–503.
- Plessix, R. E. (2007). A Helmholtz iterative solver for 3D seismic-imaging problems. *Geophysics*, 72(5):SM185–SM194.

- Plessix, R. E. & Cao, Q. (2011). A parametrization study for surface seismic full waveform inversion in an acoustic vertical transversely isotropic medium. *Geophysical Journal International*, 185:539–556.
- Plessix, R. E. & Perkins, C. (2010). Full waveform inversion of a deep water ocean bottom seismometer dataset. *First Break*, 28:71–78.
- Plona, T. (1980). Observation of a second bulk compressional wave in a porous medium at ultrasonic frequencies. *Applied Physics Letters*, 36(4):259–261.
- Pratt, R. G., Shin, C. & Hicks, G. J. (1998). Gauss-Newton and full Newton methods in frequency-space seismic waveform inversion. *Geophysical Journal International*, 133:341–362.
- Pride, S. (2005). *Hydrogeophysics*, pages 253–284. Water Science and Technology Library, Springer, The Netherlands.
- Pride, S. & Berryman, J. (1998). Volume averaging, effective stress rules and inversion for microstructural response of multicomponent porous media. *International Journal of Solids and Structures*, 35(34-35):4811–4843.
- Pride, S. & Berryman, J. (2003a). Linear dynamics of double-porosity dual-permeability materials. I. Governing equations and acoustic attenuation. *Physical Review E*, 68:036603.
- Pride, S. & Berryman, J. (2003b). Linear dynamics of double-porosity dual-permeability materials. II. Fluid transport equations. *Physical Review E*, 68:036604.
- Pride, S., Berryman, J. & Harris, J. (2004). Seismic attenuation due to wave-induced flow. *Journal of Geophysical Research*, 109(B01201):1–19.
- Pride, S., Gangi, A. & Morgan, F. (1992). Deriving the equations of motion for porous isotropic media. *Journal of Acoustical Society of America*, 92(6):3278–3290.
- Pride, S. & Garambois, S. (2002). The role of Biot slow waves in electroseismic wave phenomena. *Journal of Acoustical Society of America*, 111:697–706.
- Pride, S. & Garambois, S. (2005). Electrostatic wave theory of Frenkel and more recent developments. *Journal of Engineering Mechanics*, pages 898–907.
- Raiga-Clemenceau, J., Martin, J. & Nicoletis, S. (1988). The concept of acoustic formation factor for more accurate porosity determination from sonic transit time data. *Log Analyst*, 219:54–60.
- Rasolofosaon, P. (1987). *Propagation des ondes acoustiques dans les milieux poreux - effets d'interface - (Théorie et expériences)*. Thèse de doctorat, Université Paris VII.
- Rasolofosaon, P. & Zinszner, B. (2002). Vérification expérimentale de la formule de Gassmann dans les calcaires poreux. *Oil and Gas Science and Technology - Rev. Institut Français du Pétrole*, 52(2):129–138.
- Rasolofosaon, P. & Zinszner, B. (2007). The unreasonable success of Gassmann's theory... revisited. *12th international workshop on seismic anisotropy*, pages Beijing, China.

- Ravaut, C., Operto, S., Improta, L., Virieux, J., Herrero, A. & dell'Aversana, P. (2004). Multi-scale imaging of complex structures from multi-fold wide-aperture seismic data by frequency-domain full-wavefield inversions : application to a thrust belt. *Geophysical Journal International*, 159:1032–1056.
- Raymer, L., Hunt, E. & Gardner, J. (1980). An improved sonic transit time-to-porosity transform. In *Abstracts Soc Professional Well Log Analysis (SPWLA), 21st Ann. Logg. Symp., Paper P July*.
- Remaki, M. (2000). A new finite volume scheme for solving Maxwell's system. *COMPEL*, 19(3):913–931.
- Ren, H., Goloshubin, G. & Hilterman, F. (2009). Poroelastic analysis of amplitude-versus-frequency variations. *Geophysics*, 74:41–48.
- Reuss, A. (1929). Berechnung der fließgrenze von mischkristallen auf grund der plastizitätsbedingung für einkristalle. *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik / Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 9:49–58.
- Reynolds, J. (1997). *An introduction to applied and environmental geophysics*. Wiley.
- Roecker, S., Baker, B. & McLaughlin, J. (2010). A finite-difference algorithm for full waveform teleseismic tomography. *Geophysical Journal International*, 181:1017–1040.
- Romdhane, A., Grandjean, G., Brossier, R., Réjiba, F., Operto, S. & Virieux, J. (2011). Shallow structures characterization by 2d elastic waveform inversion. *Geophysics*, 76(3):R81.
- Roques, A., Brossier, R., Virieux, J. & Mars, J. (2010). High-resolution seismic imaging applied to the characterization of very shallow highly contrasted structures. In *AGU Fall Meeting Abstracts*, pages NS41A–1500.
- Rothman, D. H. (1985). Nonlinear inversion, statistical mechanics and residual statics estimation. *Geophysics*, 50:2797–2807.
- Rothman, D. H. (1986). Automatic estimation of large residual statics corrections. *Geophysics*, 51(2):332–346.
- Royer, P., Auriault, J.-L. & Boutin, C. (1996). Macroscopic modeling of double -porosity reservoirs. *Petroleum Sciences and Engineering*, 16:187–202.
- Rubino, J., Ravazzoli, C. & Santos, J. (2009). Equivalent viscoelastic solids for heterogeneous fluid-saturated porous rocks. *Geophysics*, 74(1):1–13.
- Sahay, P. N. (2008). On the biot slow s-wave. *Geophysics*, 73(4):19–33.
- Sambridge, M. & Kennett, B. (2001). Seismic event location : nonlinear inversion using a neighbourhood algorithm. *Pure and Applied Geophysics*, 158:241–257.
- Sambridge, M. S. (1999a). Geophysical inversion with a neighbourhood algorithm - I. searching a parameter space. *Geophysical Journal International*, 138:479–494.
- Sambridge, M. S. (1999b). Geophysical inversion with a neighbourhood algorithm - II. appraising the ensemble. *Geophysical Journal International*, 138:727–746.

- Sen, M. K. & Stoffa, P. L. (1995). *Global Optimization Methods in Geophysical Inversion*. Elsevier Science Publishing Co.
- Shewchuk, J. R. (1996). Triangle : Engineering a 2D Quality Mesh Generator and Delaunay Triangulator. In *Applied Computational Geometry : Towards Geometric Engineering*, volume 1148, pages 203–222.
- Sidler, R., Carcione, J. & Holliger, K. (2010). Simulation of surface waves in porous media. *Geophysical Journal International*, 183(2):820–832.
- Sirgue, L., Barkved, O. I., Gestel, J. P. V., Askim, O. J. & Kommedal, J. H. . (2009). 3D waveform inversion on Valhall wide-azimuth OBC. In *Presented at the 71th Annual International Meeting, EAGE, Expanded Abstracts*, page U038.
- Skempton, A. W. (1954). The pore pressure coefficients A and B. *Geotechnique*, pages 143–147.
- Spencer, J., Cates, M. & Thompson, D. (1994). Frame moduli of unconsolidated sands and sandstones. *Geophysics*, 59(9):1352–1361.
- Stekl, I. & Pratt, R. G. (1998). Accurate viscoelastic modeling by frequency-domain finite difference using rotated operators. *Geophysics*, 63:1779–1794.
- Stern, M., Bedford, A. & Millwater, M. (2003). Wave reflection from a sediment layer with depth dependent properties. *Journal of Acoustical Society of America*, 77:1781–1788.
- Stoffa, P. L. & Sen, M. K. (1991). Nonlinear multiparameter optimization using genetic algorithms : Inversion of plane-wave seismograms. *Geophysics*, 56(11):1794–1810.
- Stoll, R. (1977). Acoustic waves in ocean sediments. *Geophysics*, 42(4):715–725.
- Stoll, R. & Kan, T. (1981). Reflection of acoustic waves at a water-sediment interface. *Journal of Acoustical Society of America*, 70:149–156.
- Tang, X. & Cheng, C. (1996). Fast inversion of formation permeability from Stoneley wave logs using a simplified Biot-Rosenbaum model. *Geophysics*, 61(3):639–645.
- Tarantola, A. (1984). Linearized inversion of seismic reflection data. *Geophysical Prospecting*, 32:998–1015.
- Tarantola, A. (1987). *Inverse problem theory : methods for data fitting and model parameter estimation*. Elsevier, New York.
- Teja, A. & Rice, P. (1981). Generalized corresponding states method for viscosities of liquid mixtures. *Industrial and Engineering Chemistry Fundamentals*, 20:77–81.
- Thomas, P. & Pace, N. (1980). Broadband measurements of acoustic attenuation in water-saturated sands. *Ultrasonics*, 18:13–17.
- van Dalen, K. N., Ghose, R., Drijkoningen, G. & Smeulders, D. (2010). In-situ permeability from integrated poroelastic reflection coefficients. *Geophysical Research Letters*, 37:L12303.
- van Laarhoven, P. & Aarts, E. (1987). *Simulated Annealing : Theory and Applications*. D. Reidel Publishing Co.

- Vidale, D. (1988). Finite-difference calculation of travel time. *Bulletin of the Seismological Society of America*, 78:2062–2076.
- Vidale, J. (1990). Finite-difference calculation of travel times in three dimensions. *Geophysics*, 55(5):521–526.
- Vogelaar, B., Smeulders, D. & Harris, J. (2010). Exact expression for the effective acoustics of patchy-saturated rocks. *Geophysics*, 75(4):87–96.
- Voigt, W. (1889). Über die beziehung zwischen den beiden elastizitatkonstanten isotroper körper. *Annalen der Physik*, 38:573–587.
- Walton, K. (1987). The effective elastic moduli of a random packing of spheres. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 35:213–226.
- Wang, Z., Hirsche, W. & Sedgwick, G. (1991). Seismic monitoring of water floods? A petrophysical study. *Geophysics*, 56:1614–1623.
- Watanabe, T., Shimizu, S., Asakawa, E. & Matsuoka, T. (2004). Differential waveform tomography for time-lapse crosswell seismic data with application to gas hydrate production monitoring. *SEG Technical Program Expanded Abstracts*, 23(1):2323–2326.
- Wenzlau, F. & Muller, T. (2009). Finite-difference modeling of wave propagation and diffusion in poroelastic media. *Geophysics*, 74(4):55–66.
- White, J. E. (1975). Computed seismic speeds and attenuation in rocks with partial gas saturation. *Geophysics*, 40(2):224–232.
- Wyllie, M., Gregory, J. & Gardner, L. (1956). Elastic wave velocities in heterogeneous and porous media. *Geophysics*, 21:41–70.
- Zener, C. (1948). *Elasticity and anelasticity of metals*. University of Chicago Press.

Annexe A

Méthode des éléments finis discontinus (Galerkin Discontinue) : développement des interpolations polynomiales d'ordre Pk

Sommaire

A.1	Rappel des équations de la poroélastodynamique : système 2D P-SV en fréquence	213
A.2	Discrétisation spatiale par éléments finis discontinus	215
A.2.1	Flux centrés	218
A.2.2	Vecteurs de base et matrices de masse locales	220
A.2.3	Système tensoriel	222
A.2.4	Système générique	223
A.2.5	Système matriciel linéaire	225
A.2.6	Détail des termes du système linéaire, ordre P0	226
A.2.7	Développement des matrices de forme, ordre P1	229

A.1 Rappel des équations de la poroélastodynamique : système 2D P-SV en fréquence

Les équations d'ondes poroélastiques ont été formulées en fréquence à partir de la théorie de Biot (1956) et Gassmann (1951) par Pride *et al.* (1992). On obtient le système 1.7 présenté dans le chapitre 1 et également utilisé dans l'article de la partie 2.1 (système 2.8). Après ajout des conditions aux limites absorbantes (PML, Berenger (1994)) s_i et s'_i ($i = (x, z)$), les expressions de ces fonctions sont données dans l'équation 2.17), changements de variables (transformation du vecteur contrainte en $\mathbf{T}^t = ((\sigma_{xx} + \sigma_{zz})/2, (\sigma_{xx} - \sigma_{zz})/2, \sigma_{xz}, -P) = (T_1, T_2, T_3, T_4)$ (équation 2.12), passage en vitesse de déplacement \dot{u} et \dot{w} et homogénéisation des termes inertiels $\rho_1 = \rho_f^2/\tilde{\rho} - \rho$, $\rho_2 = \rho\tilde{\rho}/\rho_f - \rho_f$, $\rho_3 = \rho_f^2/\rho - \tilde{\rho}$ (équation 2.13)), le système s'écrit

(système 2.14) :

$$\begin{aligned}
 i\omega \dot{u}_x &= \frac{1}{\rho_1} \left(s_x \frac{\partial(T_1 + T_2)}{\partial x} + s_z \frac{\partial T_3}{\partial z} - F_{\sigma_x} \right) + \frac{1}{\rho_2} \left(s_x \frac{\partial T_4}{\partial x} + F_{P_x} \right), \\
 i\omega \dot{u}_z &= \frac{1}{\rho_1} \left(s_z \frac{\partial(T_1 + T_2)}{\partial z} + s_x \frac{\partial T_3}{\partial x} - F_{\sigma_z} \right) + \frac{1}{\rho_2} \left(s_z \frac{\partial T_4}{\partial z} + F_{P_z} \right), \\
 i\omega \dot{w}_x &= \frac{1}{\rho_2} \left(s_x \frac{\partial(T_1 + T_2)}{\partial x} + s_z \frac{\partial T_3}{\partial z} - F_{\sigma_x} \right) + \frac{1}{\rho_3} \left(s_x \frac{\partial T_4}{\partial x} + F_{P_x} \right), \\
 i\omega \dot{w}_z &= \frac{1}{\rho_2} \left(s_z \frac{\partial(T_1 + T_2)}{\partial z} + s_x \frac{\partial T_3}{\partial x} - F_{\sigma_z} \right) + \frac{1}{\rho_3} \left(s_z \frac{\partial T_4}{\partial z} + F_{P_z} \right), \\
 -i\omega T_1 &= (K_U + G) \left(s'_x \frac{\partial \dot{u}_x}{\partial x} + s'_z \frac{\partial \dot{u}_z}{\partial z} \right) + C \left(s'_x \frac{\partial \dot{w}_x}{\partial x} + s'_z \frac{\partial \dot{w}_z}{\partial z} \right) - i\omega T_1^0, \\
 -i\omega T_2 &= G \left(s'_x \frac{\partial \dot{u}_x}{\partial x} - s'_z \frac{\partial \dot{u}_z}{\partial z} \right) - i\omega T_2^0, \\
 -i\omega T_3 &= G \left(s'_z \frac{\partial \dot{u}_x}{\partial z} + s'_x \frac{\partial \dot{u}_z}{\partial x} \right) - i\omega T_3^0, \\
 -i\omega T_4 &= C \left(s'_x \frac{\partial \dot{u}_x}{\partial x} + s'_z \frac{\partial \dot{u}_z}{\partial z} \right) + M \left(s'_x \frac{\partial \dot{w}_x}{\partial x} + s'_z \frac{\partial \dot{w}_z}{\partial z} \right) - i\omega T_4^0. \tag{A.1}
 \end{aligned}$$

Ce système s'écrit sous forme vectorielle tel que :

$$\begin{aligned}
 i\omega \vec{u} &= \frac{1}{\rho_1} \overrightarrow{\text{div}(\vec{F}_1(\vec{T}))} + \frac{1}{\rho_2} \overrightarrow{\text{div}(\vec{F}_2(\vec{T}))} + \frac{1}{\rho_2} \overrightarrow{\text{div}(\vec{F}_3(\vec{T}))} + \frac{1}{\rho_3} \overrightarrow{\text{div}(\vec{F}_4(\vec{T}))} + \vec{F} \\
 &\quad - \left[\frac{\partial s_x}{\partial x} \left(\frac{\mathbf{N}_{x1}}{\rho_1} + \frac{\mathbf{N}_{x2}}{\rho_2} \right) \vec{T} + \frac{\partial s_z}{\partial z} \left(\frac{\mathbf{N}_{z1}}{\rho_1} + \frac{\mathbf{N}_{z2}}{\rho_2} \right) \vec{T} \right. \\
 &\quad \left. + \frac{\partial s_x}{\partial x} \left(\frac{\mathbf{N}_{x3}}{\rho_2} + \frac{\mathbf{N}_{x4}}{\rho_3} \right) \vec{T} + \frac{\partial s_z}{\partial z} \left(\frac{\mathbf{N}_{z3}}{\rho_2} + \frac{\mathbf{N}_{z4}}{\rho_3} \right) \vec{T} \right], \\
 -i\omega \vec{T} &= (\lambda_U + G) \overrightarrow{\text{div}(\vec{G}_1(\vec{u}))} + C \overrightarrow{\text{div}(\vec{G}_2(\vec{u}))} + G \overrightarrow{\text{div}(\vec{G}_3(\vec{u}))} \\
 &\quad + C \overrightarrow{\text{div}(\vec{G}_4(\vec{u}))} + M \overrightarrow{\text{div}(\vec{G}_5(\vec{u}))} - i\omega \vec{T}^0 \\
 &\quad - \left[\frac{\partial s'_x}{\partial x} ((\lambda_U + G) \mathbf{M}_{x1} + G \mathbf{M}_{x3} + C \mathbf{M}_{x4}) \vec{u} + \frac{\partial s'_z}{\partial z} ((\lambda_U + G) \mathbf{M}_{z1} + G \mathbf{M}_{z3} + C \mathbf{M}_{z4}) \vec{u} \right. \\
 &\quad \left. + \frac{\partial s'_x}{\partial x} (C \mathbf{M}_{x2} + M \mathbf{M}_{x5}) \vec{u} + \frac{\partial s'_z}{\partial z} (C \mathbf{M}_{z2} + M \mathbf{M}_{z5}) \vec{u} \right].
 \end{aligned}$$

Les vecteurs \vec{F} et \vec{T}^0 contenant les termes initiaux et les termes sources sont

$$\vec{F} = \left(-\frac{F_{\sigma_x}}{\rho_1} + \frac{F_{P_x}}{\rho_2}, -\frac{F_{\sigma_z}}{\rho_1} + \frac{F_{P_z}}{\rho_2}, -\frac{F_{\sigma_x}}{\rho_2} + \frac{F_{P_x}}{\rho_3}, -\frac{F_{\sigma_z}}{\rho_2} + \frac{F_{P_z}}{\rho_3} \right)^t, \tag{A.2}$$

$$\vec{T}^0 = (T_1^0, T_2^0, T_3^0, T_4^0)^t, \tag{A.3}$$

avec

$$T_1^0 = \frac{\sigma_{xx}^0 + \sigma_{zz}^0}{2},$$

$$\begin{aligned} T_1^0 &= \frac{\sigma_{xx}^0 - \sigma_{zz}^0}{2}, \\ T_3^0 &= \sigma_{xz}^0, \\ T_4^0 &= -P^0. \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

Les vecteurs \vec{u} et \vec{T} regroupent respectivement les quatre champs de déplacements et les quatre champs de contraintes tels que :

$$\begin{aligned} \vec{u} &= (\dot{u}_x, \dot{u}_z, \dot{w}_x, \dot{w}_z)^t, \\ \vec{T} &= (T_1, T_2, T_3, T_4)^t. \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

Les vecteurs \vec{F}_α , $\alpha \in (1, 4)$ et \vec{G}_β , $\beta \in (1, 5)$ sont définis tels que

$$\begin{cases} \vec{F}_1 = (s_x \mathbf{N}_{x1} \vec{T}, s_z \mathbf{N}_{z1} \vec{T}), \\ \vec{F}_2 = (s_x \mathbf{N}_{x2} \vec{T}, s_z \mathbf{N}_{z2} \vec{T}), \\ \vec{F}_3 = (t_x \mathbf{N}_{x3} \vec{T}, t_z \mathbf{N}_{z3} \vec{T}), \\ \vec{F}_4 = (t_x \mathbf{N}_{x4} \vec{T}, t_z \mathbf{N}_{z4} \vec{T}), \\ \vec{G}_1 = (s_x \mathbf{M}_{x1} \vec{u}, s_z \mathbf{M}_{z1} \vec{u}), \\ \vec{G}_2 = (t_x \mathbf{M}_{x2} \vec{u}, t_z \mathbf{M}_{z2} \vec{u}), \\ \vec{G}_3 = (s_x \mathbf{M}_{x3} \vec{u}, s_z \mathbf{M}_{z3} \vec{u}), \\ \vec{G}_4 = (s_x \mathbf{M}_{x4} \vec{u}, s_z \mathbf{M}_{z4} \vec{u}), \\ \vec{G}_5 = (t_x \mathbf{M}_{x5} \vec{u}, t_z \mathbf{M}_{z5} \vec{u}). \end{cases}$$

Les dix-huit matrices de projections sont données dans l'annexe 2.1.10 de l'article (partie 2.1).

Approximation élastique : à partir des équations (A.1), on peut retrouver les cinq champs élastiques classiques : les vitesses de déplacements de la matrice solide (\dot{u}_x et \dot{u}_z) et les contraintes s'exerçant sur le solide (T_1 , T_2 et T_3), les déplacements relatifs fluide/solide (\dot{w}_x et \dot{w}_z) et la pression (T_4) et les forces de pression $F_{P(x,z)}$ étant nuls. Pour cela, il suffit d'annuler certains paramètres : ρ_2 et ρ_3 en ce qui concerne les termes de densités et C et M pour les paramètres mécaniques. Les autres paramètres mécaniques (λ_U et G) restent inchangés. Les densités ρ_2 et ρ_3 étant dépendantes des paramètres réels ρ , ρ_f et $\tilde{\rho}$, il faut annuler ρ_f pour avoir $\rho_2 = \rho_3 = 0$. De plus, en posant $\rho_1 = \rho$, on peut ainsi retrouver les équations de l'élastodynamique.

A.2 Discrétisation spatiale par éléments finis discontinus

La discrétisation par éléments finis discontinu est faite selon une technique classique utilisée par exemple par BenJemaa *et al.* (2007), Brossier *et al.* (2008b) et Etienne *et al.* (2008) en élastodynamique 2D ou 3D, dans les domaines fréquentiel ou temporel. Le principe de la discrétisation Galerkin discontinue consiste à approximer le système par une solution discrète issues de combinaisons linéaires de fonctions de base propres à chaque cellules. Les degrés de

liberté de chaque cellule sont variables selon l'ordre d'interpolation considéré et l'approche discontinue permet d'avoir des ordres d'interpolations (et donc un nombre de degrés de liberté) différents pour des cellules voisines. Les échanges de champs entre cellules sont définis par des flux à travers les interfaces. On introduit les notations suivantes :

- $\partial\Omega$ = frontière du domaine Ω
- $\partial\tau_i$ = frontière de la cellule τ_i
- $A_i = \int_{\tau_i} dV$ = aire de la cellule τ_i
- $V(i)$ contient toutes les cellules partageant un côté avec la cellule τ_i (voisins)
- $\tau_{ik} = \tau_i \cap \tau_k$ = interface entre les cellules τ_i et τ_k
- \vec{n}_{ik} = vecteur unitaire normal à l'interface τ_{ik} , de τ_i vers τ_k

Dans chaque cellule τ_i , on considère une fonction vectorielle de base $\vec{\varphi}_{ij}$ avec $1 \leq j \leq d_i$ où d_i est le nombre de degrés de liberté dans la cellule. Les champs de contraintes et de vitesses peuvent alors s'exprimer

$$\begin{cases} \vec{u}_i = \sum_{j=1}^{d_i} \dot{u}_{ij} \vec{\varphi}_{ij} , \\ \vec{T}_i = \sum_{j=1}^{d_i} T_{ij} \vec{\varphi}_{ij} , \end{cases} \quad (\text{A.6})$$

où \dot{u}_{ij} et T_{ij} représentent respectivement les j^{eme} degrés de liberté de \vec{u}_i et \vec{T}_i . Ce type de fonctions de base permet de ne pas avoir de continuité des champs entre chaque cellule. Cependant, dans cette formulations, les coefficients PML et les propriétés physiques sont considérées constants dans chaque cellule. Grâce à cette hypothèse, les termes en dérivées partielles des fonctions PML du système A.2 sont nuls. En multipliant les équations A.2 par la fonction test $\vec{\varphi}_{ij}$ et en intégrant sur la cellule τ_i , on obtient

$$\begin{aligned} \int_{\tau_i} i\omega \vec{\varphi}_{ij} \vec{u} &= \int_{\tau_i} \frac{1}{\rho_1} \vec{\varphi}_{ij} \overrightarrow{\text{div}(\vec{F}_1(\vec{T}))} + \int_{\tau_i} \frac{1}{\rho_2} \vec{\varphi}_{ij} \overrightarrow{\text{div}(\vec{F}_2(\vec{T}))} \\ &+ \int_{\tau_i} \frac{1}{\rho_2} \vec{\varphi}_{ij} \overrightarrow{\text{div}(\vec{F}_3(\vec{T}))} + \int_{\tau_i} \frac{1}{\rho_3} \vec{\varphi}_{ij} \overrightarrow{\text{div}(\vec{F}_4(\vec{T}))} + \int_{\tau_i} \vec{\varphi}_{ij} \vec{F} , \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

$$\begin{aligned} \int_{\tau_i} -i\omega \vec{\varphi}_{ij} \vec{T} &= \int_{\tau_i} (\lambda_U + G) \vec{\varphi}_{ij} \overrightarrow{\text{div}(\vec{G}_1(\vec{u}))} + \int_{\tau_i} C \vec{\varphi}_{ij} \overrightarrow{\text{div}(\vec{G}_2(\vec{u}))} + \int_{\tau_i} G \vec{\varphi}_{ij} \overrightarrow{\text{div}(\vec{G}_3(\vec{u}))} \\ &+ \int_{\tau_i} C \vec{\varphi}_{ij} \overrightarrow{\text{div}(\vec{G}_4(\vec{u}))} + \int_{\tau_i} M \vec{\varphi}_{ij} \overrightarrow{\text{div}(\vec{G}_5(\vec{u}))} - \int_{\tau_i} i\omega \vec{\varphi}_{ij} \vec{T}^0 . \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

Une intégration par partie donne

$$\begin{aligned} \int_{\tau_i} i\omega \vec{\varphi}_{ij} \vec{u} &= - \int_{\tau_i} \frac{1}{\rho_1} \vec{\nabla} \vec{\varphi}_{ij} : \vec{F}_1(\vec{T}) + \int_{\partial\tau_i} \frac{1}{\rho_1} \vec{\varphi}_{ij} (\vec{F}_1(\vec{T}) \cdot \vec{n}) \\ &- \int_{\tau_i} \frac{1}{\rho_2} \vec{\nabla} \vec{\varphi}_{ij} : \vec{F}_2(\vec{T}) + \int_{\partial\tau_i} \frac{1}{\rho_2} \vec{\varphi}_{ij} (\vec{F}_2(\vec{T}) \cdot \vec{n}) \\ &- \int_{\tau_i} \frac{1}{\rho_2} \vec{\nabla} \vec{\varphi}_{ij} : \vec{F}_3(\vec{T}) + \int_{\partial\tau_i} \frac{1}{\rho_2} \vec{\varphi}_{ij} (\vec{F}_3(\vec{T}) \cdot \vec{n}) \\ &- \int_{\tau_i} \frac{1}{\rho_3} \vec{\nabla} \vec{\varphi}_{ij} : \vec{F}_4(\vec{T}) + \int_{\partial\tau_i} \frac{1}{\rho_3} \vec{\varphi}_{ij} (\vec{F}_4(\vec{T}) \cdot \vec{n}) + \int_{\tau_i} \vec{\varphi}_{ij} \vec{F} , \end{aligned} \quad (\text{A.9})$$

$$\begin{aligned}
 \int_{\tau_i} -i\omega \vec{\varphi}_{ij} \vec{T} &= - \int_{\tau_i} (\lambda_U + G) \vec{\nabla} \vec{\varphi}_{ij} : \vec{G}_1(\vec{u}) + \int_{\partial\tau_i} (\lambda_U + G) \vec{\varphi}_{ij} (\vec{G}_1(\vec{u}) \cdot \vec{n}) \\
 &\quad - \int_{\tau_i} C \vec{\nabla} \vec{\varphi}_{ij} : \vec{G}_2(\vec{u}) + \int_{\partial\tau_i} C \vec{\varphi}_{ij} (\vec{G}_2(\vec{u}) \cdot \vec{n}) \\
 &\quad - \int_{\tau_i} G \vec{\nabla} \vec{\varphi}_{ij} : \vec{G}_3(\vec{u}) + \int_{\partial\tau_i} G \vec{\varphi}_{ij} (\vec{G}_3(\vec{u}) \cdot \vec{n}) \\
 &\quad - \int_{\tau_i} C \vec{\nabla} \vec{\varphi}_{ij} : \vec{G}_4(\vec{u}) + \int_{\partial\tau_i} C \vec{\varphi}_{ij} (\vec{G}_4(\vec{u}) \cdot \vec{n}) \\
 &\quad - \int_{\tau_i} M \vec{\nabla} \vec{\varphi}_{ij} : \vec{G}_5(\vec{u}) + \int_{\partial\tau_i} M \vec{\varphi}_{ij} (\vec{G}_5(\vec{u}) \cdot \vec{n}) - \int_{\tau_i} i\omega \vec{\varphi}_{ij} \vec{T}^0,
 \end{aligned}$$

avec, pour tout vecteur $\vec{p} = (p_1, \dots, p_d)^t$,

$$\vec{\nabla} \vec{p} = \begin{bmatrix} \partial_x p_1 & \partial_z p_1 \\ \vdots & \vdots \\ \partial_x p_d & \partial_z p_d \end{bmatrix}, \quad (\text{A.10})$$

et, pour les matrices $\mathbf{A} = (a_{ij}) \in \mathbf{M}_{\mathbf{n},\mathbf{m}}$ et $\mathbf{B} = (b_{ij}) \in \mathbf{M}_{\mathbf{n},\mathbf{m}}$ avec $1 \leq i \leq n$ et $1 \leq j \leq m$:

$$\mathbf{A} : \mathbf{B} = \sum_{1 \leq i \leq n} \sum_{1 \leq j \leq m} a_{ij} b_{ij}. \quad (\text{A.11})$$

Le système A.9 peut donc être approximé par

$$\begin{aligned}
 \int_{\tau_i} i\omega \vec{\varphi}_{ij} \vec{u}_i &= - \int_{\tau_i} \frac{1}{\rho_{1i}} \vec{\nabla} \vec{\varphi}_{ij} : \vec{F}_1(\vec{T}_i) + \int_{\partial\tau_i} \frac{1}{\rho_{1i}} \vec{\varphi}_{ij} (\vec{F}_1(\vec{T}_i / \partial\tau_i) \cdot \vec{n}) \\
 &\quad - \int_{\tau_i} \frac{1}{\rho_{2i}} \vec{\nabla} \vec{\varphi}_{ij} : \vec{F}_2(\vec{T}_i) + \int_{\partial\tau_i} \frac{1}{\rho_{2i}} \vec{\varphi}_{ij} (\vec{F}_2(\vec{T}_i / \partial\tau_i) \cdot \vec{n}) \\
 &\quad - \int_{\tau_i} \frac{1}{\rho_{2i}} \vec{\nabla} \vec{\varphi}_{ij} : \vec{F}_3(\vec{T}_i) + \int_{\partial\tau_i} \frac{1}{\rho_{2i}} \vec{\varphi}_{ij} (\vec{F}_3(\vec{T}_i / \partial\tau_i) \cdot \vec{n}) \\
 &\quad - \int_{\tau_i} \frac{1}{\rho_{3i}} \vec{\nabla} \vec{\varphi}_{ij} : \vec{F}_4(\vec{T}_i) + \int_{\partial\tau_i} \frac{1}{\rho_{3i}} \vec{\varphi}_{ij} (\vec{F}_4(\vec{T}_i / \partial\tau_i) \cdot \vec{n}) + \int_{\tau_i} \vec{\varphi}_{ij} \vec{F}_i,
 \end{aligned} \quad (\text{A.12})$$

$$\begin{aligned}
 \int_{\tau_i} -i\omega \vec{\varphi}_{ij} \vec{T}_i &= - \int_{\tau_i} (\lambda_{U_i} + G_i) \vec{\nabla} \vec{\varphi}_{ij} : \vec{G}_1(\vec{u}_i) + \int_{\partial\tau_i} (\lambda_{U_i} + G_i) \vec{\varphi}_{ij} (\vec{G}_1(\vec{u}_i / \partial\tau_i) \cdot \vec{n}) \\
 &\quad - \int_{\tau_i} C_i \vec{\nabla} \vec{\varphi}_{ij} : \vec{G}_2(\vec{u}_i) + \int_{\partial\tau_i} C_i \vec{\varphi}_{ij} (\vec{G}_2(\vec{u}_i / \partial\tau_i) \cdot \vec{n}) \\
 &\quad - \int_{\tau_i} G_i \vec{\nabla} \vec{\varphi}_{ij} : \vec{G}_3(\vec{u}_i) + \int_{\partial\tau_i} G_i \vec{\varphi}_{ij} (\vec{G}_3(\vec{u}_i / \partial\tau_i) \cdot \vec{n}) \\
 &\quad - \int_{\tau_i} C_i \vec{\nabla} \vec{\varphi}_{ij} : \vec{G}_4(\vec{u}_i) + \int_{\partial\tau_i} C_i \vec{\varphi}_{ij} (\vec{G}_4(\vec{u}_i / \partial\tau_i) \cdot \vec{n}) \\
 &\quad - \int_{\tau_i} M_i \vec{\nabla} \vec{\varphi}_{ij} : \vec{G}_5(\vec{u}_i) + \int_{\partial\tau_i} M_i \vec{\varphi}_{ij} (\vec{G}_5(\vec{u}_i / \partial\tau_i) \cdot \vec{n}) - \int_{\tau_i} i\omega \vec{\varphi}_{ij} \vec{T}_i^0.
 \end{aligned}$$

où $\vec{F}_\alpha(\vec{T}_{/\partial\tau_i})$ et $\vec{G}_\beta(\vec{u}_{/\partial\tau_i})$ sont les approximations de $\vec{F}_\alpha(\vec{T})$ et $\vec{G}_\beta(\vec{u})$ sur l'interface $\partial\tau_i$ ($\alpha \in (1, 4)$ et $\beta \in (1, 5)$). On rappelle que les paramètres de masse (ρ_{1i} , ρ_{2i} et ρ_{3i}) et les paramètres mécaniques (λ_{Ui} , G_i , C_i et M_i) sont constants par cellule τ_i .

A.2.1 Flux centrés

Nous avons choisi d'utiliser les flux centrés (introduits par Remaki (2000)) pour l'approximation numérique des échanges de champs entre cellules. BenJemaa *et al.* (2009) ont montré que cette formulation permettait d'avoir une bonne conservation d'énergie dans le système mais d'autres types de flux peuvent être utilisés (voir par exemple Käser & Dumbser (2006) qui utilisent des flux upwind pour la résolution d'un système élastodynamique temporel). On exprime donc les flux centrés de la façon suivante :

$$\begin{cases} \vec{F}_\alpha(\vec{T}_{/\partial\tau_{ik}}) = \vec{F}_\alpha\left(\frac{\vec{T}_i + \vec{T}_k}{2}\right), \\ \vec{G}_\beta(\vec{u}_{/\partial\tau_{ik}}) = \vec{G}_\beta\left(\frac{\vec{u}_i + \vec{u}_k}{2}\right), \end{cases} \quad (\text{A.13})$$

soit

$$\begin{cases} \vec{F}_\alpha(\vec{T}_{/\partial\tau_{ik}}) = \frac{1}{2} \left(\vec{F}_\alpha(\vec{T}_i) + \vec{F}_\alpha(\vec{T}_k) \right), \\ \vec{G}_\beta(\vec{u}_{/\partial\tau_{ik}}) = \frac{1}{2} \left(\vec{G}_\beta(\vec{u}_i) + \vec{G}_\beta(\vec{u}_k) \right). \end{cases} \quad (\text{A.14})$$

On écrit alors le système A.12 sous la forme

$$\begin{aligned} \int_{\tau_i} i\omega \vec{\varphi}_{ij}^{\rightarrow t} \vec{u}_i &= - \int_{\tau_i} \frac{1}{\rho_{1i}} \vec{\nabla} \vec{\varphi}_{ij}^{\rightarrow} : \vec{F}_1(\vec{T}_i) + \frac{1}{2} \sum_{k \in V(i)} \int_{\tau_{ik}} \frac{1}{\rho_{1i}} \vec{\varphi}_{ij}^{\rightarrow t} (\vec{F}_1(\vec{T}_i) + \vec{F}_1(\vec{T}_k)) \vec{n}_{ik} \\ &\quad - \int_{\tau_i} \frac{1}{\rho_{2i}} \vec{\nabla} \vec{\varphi}_{ij}^{\rightarrow} : \vec{F}_2(\vec{T}_i) + \frac{1}{2} \sum_{k \in V(i)} \int_{\tau_{ik}} \frac{1}{\rho_{2i}} \vec{\varphi}_{ij}^{\rightarrow t} (\vec{F}_2(\vec{T}_i) + \vec{F}_2(\vec{T}_k)) \vec{n}_{ik} \\ &\quad - \int_{\tau_i} \frac{1}{\rho_{2i}} \vec{\nabla} \vec{\varphi}_{ij}^{\rightarrow} : \vec{F}_3(\vec{T}_i) + \frac{1}{2} \sum_{k \in V(i)} \int_{\tau_{ik}} \frac{1}{\rho_{2i}} \vec{\varphi}_{ij}^{\rightarrow t} (\vec{F}_3(\vec{T}_i) + \vec{F}_3(\vec{T}_k)) \vec{n}_{ik} \\ &\quad - \int_{\tau_i} \frac{1}{\rho_{3i}} \vec{\nabla} \vec{\varphi}_{ij}^{\rightarrow} : \vec{F}_4(\vec{T}_i) + \frac{1}{2} \sum_{k \in V(i)} \int_{\tau_{ik}} \frac{1}{\rho_{3i}} \vec{\varphi}_{ij}^{\rightarrow t} (\vec{F}_4(\vec{T}_i) + \vec{F}_4(\vec{T}_k)) \vec{n}_{ik} + \int_{\tau_i} \vec{\varphi}_{ij}^{\rightarrow t} \vec{F}_i, \\ &\hspace{20em} (\text{A.15}) \\ \int_{\tau_i} -i\omega \vec{\varphi}_{ij}^{\rightarrow t} \vec{T}_i &= - \int_{\tau_i} (\lambda_{Ui} + G_i) \vec{\nabla} \vec{\varphi}_{ij}^{\rightarrow} : \vec{G}_1(\vec{u}_i) + \frac{1}{2} \sum_{k \in V(i)} \int_{\tau_{ik}} (\lambda_{Ui} + G_i) \vec{\varphi}_{ij}^{\rightarrow t} (\vec{G}_1(\vec{u}_i) + \vec{G}_1(\vec{u}_k)) \vec{n}_{ik} \\ &\quad - \int_{\tau_i} C_i \vec{\nabla} \vec{\varphi}_{ij}^{\rightarrow} : \vec{G}_2(\vec{u}_i) + \frac{1}{2} \sum_{k \in V(i)} \int_{\tau_{ik}} C_i \vec{\varphi}_{ij}^{\rightarrow t} (\vec{G}_2(\vec{u}_i) + \vec{G}_2(\vec{u}_k)) \vec{n}_{ik} \\ &\quad - \int_{\tau_i} G_i \vec{\nabla} \vec{\varphi}_{ij}^{\rightarrow} : \vec{G}_3(\vec{u}_i) + \frac{1}{2} \sum_{k \in V(i)} \int_{\tau_{ik}} G_i \vec{\varphi}_{ij}^{\rightarrow t} (\vec{G}_3(\vec{u}_i) + \vec{G}_3(\vec{u}_k)) \vec{n}_{ik} \\ &\quad - \int_{\tau_i} C_i \vec{\nabla} \vec{\varphi}_{ij}^{\rightarrow} : \vec{G}_4(\vec{u}_i) + \frac{1}{2} \sum_{k \in V(i)} \int_{\tau_{ik}} C_i \vec{\varphi}_{ij}^{\rightarrow t} (\vec{G}_4(\vec{u}_i) + \vec{G}_4(\vec{u}_k)) \vec{n}_{ik} \\ &\quad - \int_{\tau_i} M_i \vec{\nabla} \vec{\varphi}_{ij}^{\rightarrow} : \vec{G}_5(\vec{u}_i) + \frac{1}{2} \sum_{k \in V(i)} \int_{\tau_{ik}} M_i \vec{\varphi}_{ij}^{\rightarrow t} (\vec{G}_5(\vec{u}_i) + \vec{G}_5(\vec{u}_k)) \vec{n}_{ik} - \int_{\tau_i} i\omega \vec{\varphi}_{ij}^{\rightarrow t} \vec{T}_i^0. \end{aligned}$$

Avec les approximations discrètes des vecteurs \vec{u}_i et \vec{T}_i (équation A.6), on obtient le système suivant :

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=1}^{d_i} i\omega \dot{u}_{ik} \int_{\tau_i} \vec{\varphi}_{ij}^t \vec{\varphi}_{ik} &= - \sum_{k=1}^{d_i} \frac{1}{\rho_{1i}} T_{ik} \int_{\tau_i} \vec{\nabla} \vec{\varphi}_{ij} : \vec{F}_1(\vec{\varphi}_{ik}) \\
 &+ \frac{1}{2} \sum_{k \in V(i)} \left(\sum_{r=1}^{d_i} \frac{1}{\rho_{1i}} T_{ir} \int_{\tau_{ik}} \vec{\varphi}_{ij}^t \vec{F}_1(\vec{\varphi}_{ir}) \vec{n}_{ik} + \sum_{s=1}^{d_k} \frac{1}{\rho_{1k}} T_{ks} \int_{\tau_{ik}} \vec{\varphi}_{ij}^t \vec{F}_1(\vec{\varphi}_{ks}) \vec{n}_{ik} \right) \\
 &- \sum_{k=1}^{d_i} \frac{1}{\rho_{2i}} T_{ik} \int_{\tau_i} \vec{\nabla} \vec{\varphi}_{ij} : \vec{F}_2(\vec{\varphi}_{ik}) \\
 &+ \frac{1}{2} \sum_{k \in V(i)} \left(\sum_{r=1}^{d_i} \frac{1}{\rho_{2i}} T_{ir} \int_{\tau_{ik}} \vec{\varphi}_{ij}^t \vec{F}_2(\vec{\varphi}_{ir}) \vec{n}_{ik} + \sum_{s=1}^{d_k} \frac{1}{\rho_{2k}} T_{ks} \int_{\tau_{ik}} \vec{\varphi}_{ij}^t \vec{F}_2(\vec{\varphi}_{ks}) \vec{n}_{ik} \right) \\
 &- \sum_{k=1}^{d_i} \frac{1}{\rho_{2i}} T_{ik} \int_{\tau_i} \vec{\nabla} \vec{\varphi}_{ij} : \vec{F}_3(\vec{\varphi}_{ik}) \\
 &+ \frac{1}{2} \sum_{k \in V(i)} \left(\sum_{r=1}^{d_i} \frac{1}{\rho_{2i}} T_{ir} \int_{\tau_{ik}} \vec{\varphi}_{ij}^t \vec{F}_3(\vec{\varphi}_{ir}) \vec{n}_{ik} + \sum_{s=1}^{d_k} \frac{1}{\rho_{2k}} T_{ks} \int_{\tau_{ik}} \vec{\varphi}_{ij}^t \vec{F}_3(\vec{\varphi}_{ks}) \vec{n}_{ik} \right) \\
 &- \sum_{k=1}^{d_i} \frac{1}{\rho_{3i}} T_{ik} \int_{\tau_i} \vec{\nabla} \vec{\varphi}_{ij} : \vec{F}_4(\vec{\varphi}_{ik}) \\
 &+ \frac{1}{2} \sum_{k \in V(i)} \left(\sum_{r=1}^{d_i} \frac{1}{\rho_{3i}} T_{ir} \int_{\tau_{ik}} \vec{\varphi}_{ij}^t \vec{F}_4(\vec{\varphi}_{ir}) \vec{n}_{ik} + \sum_{s=1}^{d_k} \frac{1}{\rho_{3k}} T_{ks} \int_{\tau_{ik}} \vec{\varphi}_{ij}^t \vec{F}_4(\vec{\varphi}_{ks}) \vec{n}_{ik} \right) \\
 &+ \sum_{k=1}^{d_i} F_{ik} \int_{\tau_i} \vec{\varphi}_{ij}^t \vec{\varphi}_{ik} ,
 \end{aligned} \tag{A.16}$$

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=1}^{d_i} -i\omega T_{ik} \int_{\tau_i} \vec{\varphi}_{ij}^t \vec{\varphi}_{ik} &= - \sum_{k=1}^{d_i} (\lambda_{Ui} + G_i) \dot{u}_{ik} \int_{\tau_i} \vec{\nabla} \vec{\varphi}_{ij} : \vec{G}_1(\vec{\varphi}_{ik}) \\
 &+ \frac{1}{2} \sum_{k \in V(i)} \left(\sum_{r=1}^{d_i} (\lambda_{Ui} + G_i) \dot{u}_{ir} \int_{\tau_{ik}} \vec{\varphi}_{ij}^t \vec{G}_1(\vec{\varphi}_{ir}) \vec{n}_{ik} \right. \\
 &+ \left. \sum_{s=1}^{d_k} (\lambda_{Uk} + G_k) \dot{u}_{ks} \int_{\tau_{ik}} \vec{\varphi}_{ij}^t \vec{G}_1(\vec{\varphi}_{ks}) \vec{n}_{ik} \right) \\
 &- \sum_{k=1}^{d_i} C_i \dot{u}_{ik} \int_{\tau_i} \vec{\nabla} \vec{\varphi}_{ij} : \vec{G}_2(\vec{\varphi}_{ik}) \\
 &+ \frac{1}{2} \sum_{k \in V(i)} \left(\sum_{r=1}^{d_i} C_i \dot{u}_{ir} \int_{\tau_{ik}} \vec{\varphi}_{ij}^t \vec{G}_2(\vec{\varphi}_{ir}) \vec{n}_{ik} + \sum_{s=1}^{d_k} C_k \dot{u}_{ks} \int_{\tau_{ik}} \vec{\varphi}_{ij}^t \vec{G}_2(\vec{\varphi}_{ks}) \vec{n}_{ik} \right) \\
 &- \sum_{k=1}^{d_i} G_i \dot{u}_{ik} \int_{\tau_i} \vec{\nabla} \vec{\varphi}_{ij} : \vec{G}_3(\vec{\varphi}_{ik})
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{1}{2} \sum_{k \in V(i)} \left(\sum_{r=1}^{d_i} G_i \dot{u}_{ir} \int_{\tau_{ik}} \overrightarrow{\varphi}_{ij}^t \overrightarrow{G}_3(\overrightarrow{\varphi}_{ir}) \overrightarrow{n}_{ik} + \sum_{s=1}^{d_k} G_k \dot{u}_{ks} \int_{\tau_{ik}} \overrightarrow{\varphi}_{ij}^t \overrightarrow{G}_3(\overrightarrow{\varphi}_{ks}) \overrightarrow{n}_{ik} \right) \\
 & - \sum_{k=1}^{d_i} C_i \dot{u}_{ik} \int_{\tau_i} \overrightarrow{\nabla} \overrightarrow{\varphi}_{ij} : \overrightarrow{G}_4(\overrightarrow{\varphi}_{ik}) \\
 & + \frac{1}{2} \sum_{k \in V(i)} \left(\sum_{r=1}^{d_i} C_i \dot{u}_{ir} \int_{\tau_{ik}} \overrightarrow{\varphi}_{ij}^t \overrightarrow{G}_4(\overrightarrow{\varphi}_{ir}) \overrightarrow{n}_{ik} + \sum_{s=1}^{d_k} C_k \dot{u}_{ks} \int_{\tau_{ik}} \overrightarrow{\varphi}_{ij}^t \overrightarrow{G}_4(\overrightarrow{\varphi}_{ks}) \overrightarrow{n}_{ik} \right) \\
 & - \sum_{k=1}^{d_i} M_i V_{ik} \int_{\tau_i} \overrightarrow{\nabla} \overrightarrow{\varphi}_{ij} : \overrightarrow{G}_5(\overrightarrow{\varphi}_{ik}) \\
 & + \frac{1}{2} \sum_{k \in \dot{u}(i)} \left(\sum_{r=1}^{d_i} M_i \dot{u}_{ir} \int_{\tau_{ik}} \overrightarrow{\varphi}_{ij}^t \overrightarrow{G}_5(\overrightarrow{\varphi}_{ir}) \overrightarrow{n}_{ik} + \sum_{s=1}^{d_k} M_k \dot{u}_{ks} \int_{\tau_{ik}} \overrightarrow{\varphi}_{ij}^t \overrightarrow{G}_5(\overrightarrow{\varphi}_{ks}) \overrightarrow{n}_{ik} \right) \\
 & - \sum_{k=1}^{d_i} i\omega T_{ij}^0 \int_{\tau_i} \overrightarrow{\varphi}_{ij}^t \overrightarrow{\varphi}_{ik} .
 \end{aligned} \tag{A.17}$$

A.2.2 Vecteurs de base et matrices de masse locales

On introduit ensuite les notations suivantes pour chaque vecteur de base $\overrightarrow{\varphi}$

$$\begin{cases} \overrightarrow{\nabla} \overrightarrow{\varphi} : \overrightarrow{F}_n(\overrightarrow{\varphi}) = \sum_{\alpha \in (x,z)} (\partial_\alpha \overrightarrow{\varphi})^t s_\alpha \mathbf{N}_\alpha \overrightarrow{\varphi} , \\ \overrightarrow{\nabla} \overrightarrow{\varphi} : \overrightarrow{G}_m(\overrightarrow{\varphi}) = \sum_{\alpha \in (x,z)} (\partial_\alpha \overrightarrow{\varphi})^t s_\alpha \mathbf{M}_\alpha \overrightarrow{\varphi} , \end{cases} \tag{A.18}$$

où $n \in (1, 4)$ et $m \in (1, 5)$. On introduit également les matrices

$$\begin{cases} \mathcal{P}_{ik}^n = \sum_{\alpha \in (x,z)} n_{ik\alpha} s_{i\alpha} \mathbf{N}_{\alpha_n} , \\ \mathcal{Q}_{ik}^m = \sum_{\alpha \in (x,z)} n_{ik\alpha} s_{i\alpha} \mathbf{M}_{\alpha_m} , \\ \mathcal{P}_{ik}'^n = \sum_{\alpha \in (x,z)} n_{ik\alpha} s_{k\alpha} \mathbf{N}_{\alpha_n} , \\ \mathcal{Q}_{ik}'^m = \sum_{\alpha \in (x,z)} n_{ik\alpha} s_{k\alpha} \mathbf{M}_{\alpha_m} . \end{cases} \tag{A.19}$$

On a donc les égalités suivantes :

$$\overrightarrow{\varphi}_{ij}^t \overrightarrow{F}_n(\overrightarrow{\varphi}_{ir}) \overrightarrow{n}_{ik} = \overrightarrow{\varphi}_{ij}^t \mathcal{P}_{ik}^n \overrightarrow{\varphi}_{ir} , \tag{A.20}$$

$$\overrightarrow{\varphi}_{ij}^t \overrightarrow{G}_m(\overrightarrow{\varphi}_{ir}) \overrightarrow{n}_{ik} = \overrightarrow{\varphi}_{ij}^t \mathcal{Q}_{ik}^m \overrightarrow{\varphi}_{ir} , \tag{A.21}$$

$$\overrightarrow{\varphi}_{ij}^t \overrightarrow{F}_n(\overrightarrow{\varphi}_{ks}) \overrightarrow{n}_{ik} = \overrightarrow{\varphi}_{ij}^t \mathcal{P}_{ik}'^n \overrightarrow{\varphi}_{ks} , \tag{A.22}$$

$$\overrightarrow{\varphi}_{ij}^t \overrightarrow{G}_m(\overrightarrow{\varphi}_{ks}) \overrightarrow{n}_{ik} = \overrightarrow{\varphi}_{ij}^t \mathcal{Q}_{ik}'^m \overrightarrow{\varphi}_{ks} . \tag{A.23}$$

Les matrices de masse locales d'une cellule τ_i sont définies telles que :

$$(\mathcal{K})_{jk} = \int_{\tau_i} \overrightarrow{\varphi}_{ij}^t \overrightarrow{\varphi}_{ik}^t \quad 1 \leq j, k \leq d_i . \tag{A.24}$$

En définissant $\dot{\mathbf{u}}_i$ et \mathbf{T}_i les vecteurs colonnes respectivement $((\dot{u}_{ij})_{1 \leq j \leq d_i})$ et $((T_{ij})_{1 \leq j \leq d_i})$, le système A.16 s'écrit

$$\begin{aligned}
 i\omega (\mathcal{K}_i \dot{\mathbf{u}}_i)_j &= - \sum_{\alpha \in (x,z)} \sum_{k=1}^{d_i} \frac{1}{\rho_{1i}} T_{ik} \int_{\tau_i} (\partial_\alpha \vec{\varphi})^t s_\alpha \mathbf{N}_{\alpha_1} \vec{\varphi} - \sum_{\alpha \in (x,z)} \sum_{k=1}^{d_i} \frac{1}{\rho_{2i}} T_{ik} \int_{\tau_i} (\partial_\alpha \vec{\varphi})^t s_\alpha \mathbf{N}_{\alpha_2} \vec{\varphi} \\
 &- \sum_{\alpha \in (x,z)} \sum_{k=1}^{d_i} \frac{1}{\rho_{2i}} T_{ik} \int_{\tau_i} (\partial_\alpha \vec{\varphi})^t s_\alpha \mathbf{N}_{\alpha_3} \vec{\varphi} - \sum_{\alpha \in (x,z)} \sum_{k=1}^{d_i} \frac{1}{\rho_{3i}} T_{ik} \int_{\tau_i} (\partial_\alpha \vec{\varphi})^t s_\alpha \mathbf{N}_{\alpha_4} \vec{\varphi} \\
 &+ \frac{1}{2} \sum_{k \in V(i)} \left[\sum_{r=1}^{d_i} \frac{1}{\rho_{1i}} T_{ir} \int_{\tau_{ik}} \vec{\varphi}_{ij}^{\rightarrow t} \mathcal{P}_{ik}^1 \vec{\varphi}_{ir}^{\rightarrow} + \sum_{s=1}^{d_k} \frac{1}{\rho_{1k}} T_{ks} \int_{\tau_{ik}} \vec{\varphi}_{ij}^{\rightarrow t} \mathcal{P}'_{ik}^1 \vec{\varphi}_{ks}^{\rightarrow} \right] \\
 &+ \frac{1}{2} \sum_{k \in V(i)} \left[\sum_{r=1}^{d_i} \frac{1}{\rho_{2i}} T_{ir} \int_{\tau_{ik}} \vec{\varphi}_{ij}^{\rightarrow t} \mathcal{P}_{ik}^2 \vec{\varphi}_{ir}^{\rightarrow} + \sum_{s=1}^{d_k} \frac{1}{\rho_{2k}} T_{ks} \int_{\tau_{ik}} \vec{\varphi}_{ij}^{\rightarrow t} \mathcal{P}'_{ik}^2 \vec{\varphi}_{ks}^{\rightarrow} \right] \\
 &+ \frac{1}{2} \sum_{k \in V(i)} \left[\sum_{r=1}^{d_i} \frac{1}{\rho_{2i}} T_{ir} \int_{\tau_{ik}} \vec{\varphi}_{ij}^{\rightarrow t} \mathcal{P}_{ik}^3 \vec{\varphi}_{ir}^{\rightarrow} + \sum_{s=1}^{d_k} \frac{1}{\rho_{2k}} T_{ks} \int_{\tau_{ik}} \vec{\varphi}_{ij}^{\rightarrow t} \mathcal{P}'_{ik}^3 \vec{\varphi}_{ks}^{\rightarrow} \right] \\
 &+ \frac{1}{2} \sum_{k \in V(i)} \left[\sum_{r=1}^{d_i} \frac{1}{\rho_{3i}} T_{ir} \int_{\tau_{ik}} \vec{\varphi}_{ij}^{\rightarrow t} \mathcal{P}_{ik}^4 \vec{\varphi}_{ir}^{\rightarrow} + \sum_{s=1}^{d_k} \frac{1}{\rho_{3k}} T_{ks} \int_{\tau_{ik}} \vec{\varphi}_{ij}^{\rightarrow t} \mathcal{P}'_{ik}^4 \vec{\varphi}_{ks}^{\rightarrow} \right] \\
 &+ (\mathcal{K}_i \mathbf{F}_i)_j,
 \end{aligned} \tag{A.25}$$

$$\begin{aligned}
 -i\omega (\mathcal{K}_i \mathbf{T}_i)_j &= - \sum_{\alpha \in (x,z)} \sum_{k=1}^{d_i} (\lambda_{U_i} + G_i) \dot{u}_{ik} \int_{\tau_i} (\partial_\alpha \vec{\varphi})^t s_\alpha \mathbf{M}_{\alpha_1} \vec{\varphi} \\
 &- \sum_{\alpha \in (x,z)} \sum_{k=1}^{d_i} C_i \dot{u}_{ik} \int_{\tau_i} (\partial_\alpha \vec{\varphi})^t s_\alpha \mathbf{M}_{\alpha_2} \vec{\varphi} - \sum_{\alpha \in (x,z)} \sum_{k=1}^{d_i} G_i \dot{u}_{ik} \int_{\tau_i} (\partial_\alpha \vec{\varphi})^t s_\alpha \mathbf{M}_{\alpha_3} \vec{\varphi} \\
 &- \sum_{\alpha \in (x,z)} \sum_{k=1}^{d_i} C_i \dot{u}_{ik} \int_{\tau_i} (\partial_\alpha \vec{\varphi})^t s_\alpha \mathbf{M}_{\alpha_4} \vec{\varphi} - \sum_{\alpha \in (x,z)} \sum_{k=1}^{d_i} M_i \dot{u}_{ik} \int_{\tau_i} (\partial_\alpha \vec{\varphi})^t s_\alpha \mathbf{M}_{\alpha_5} \vec{\varphi} \\
 &+ \frac{1}{2} \sum_{k \in V(i)} \left[\sum_{r=1}^{d_i} (\lambda_{U_i} + G_i) \dot{u}_{ir} \int_{\tau_{ik}} \vec{\varphi}_{ij}^{\rightarrow t} \mathcal{Q}_{ik}^1 \vec{\varphi}_{ir}^{\rightarrow} + \sum_{s=1}^{d_k} (\lambda_{U_k} + G_k) \dot{u}_{ks} \int_{\tau_{ik}} \vec{\varphi}_{ij}^{\rightarrow t} \mathcal{Q}'_{ik}^1 \vec{\varphi}_{ks}^{\rightarrow} \right] \\
 &+ \frac{1}{2} \sum_{k \in V(i)} \left[\sum_{r=1}^{d_i} C_i \dot{u}_{ir} \int_{\tau_{ik}} \vec{\varphi}_{ij}^{\rightarrow t} \mathcal{Q}_{ik}^2 \vec{\varphi}_{ir}^{\rightarrow} + \sum_{s=1}^{d_k} C_k \dot{u}_{ks} \int_{\tau_{ik}} \vec{\varphi}_{ij}^{\rightarrow t} \mathcal{Q}'_{ik}^2 \vec{\varphi}_{ks}^{\rightarrow} \right] \\
 &+ \frac{1}{2} \sum_{k \in V(i)} \left[\sum_{r=1}^{d_i} G_i \dot{u}_{ir} \int_{\tau_{ik}} \vec{\varphi}_{ij}^{\rightarrow t} \mathcal{Q}_{ik}^3 \vec{\varphi}_{ir}^{\rightarrow} + \sum_{s=1}^{d_k} G_k \dot{u}_{ks} \int_{\tau_{ik}} \vec{\varphi}_{ij}^{\rightarrow t} \mathcal{Q}'_{ik}^3 \vec{\varphi}_{ks}^{\rightarrow} \right] \\
 &+ \frac{1}{2} \sum_{k \in V(i)} \left[\sum_{r=1}^{d_i} C_i \dot{u}_{ir} \int_{\tau_{ik}} \vec{\varphi}_{ij}^{\rightarrow t} \mathcal{Q}_{ik}^4 \vec{\varphi}_{ir}^{\rightarrow} + \sum_{s=1}^{d_k} C_k \dot{u}_{ks} \int_{\tau_{ik}} \vec{\varphi}_{ij}^{\rightarrow t} \mathcal{Q}'_{ik}^4 \vec{\varphi}_{ks}^{\rightarrow} \right] \\
 &+ \frac{1}{2} \sum_{k \in V(i)} \left[\sum_{r=1}^{d_i} M_i \dot{u}_{ir} \int_{\tau_{ik}} \vec{\varphi}_{ij}^{\rightarrow t} \mathcal{Q}_{ik}^5 \vec{\varphi}_{ir}^{\rightarrow} + \sum_{s=1}^{d_k} M_k \dot{u}_{ks} \int_{\tau_{ik}} \vec{\varphi}_{ij}^{\rightarrow t} \mathcal{Q}'_{ik}^5 \vec{\varphi}_{ks}^{\rightarrow} \right]
 \end{aligned}$$

$$- i\omega (\mathcal{K}_i \mathbf{T}_i^0)_j .$$

A.2.3 Système tensoriel

Finalement, si les vecteurs $\vec{\mathbf{u}}_i$ et $\vec{\mathbf{T}}_i$ désignent les vecteurs champs de vitesses et de contraintes dans la cellule τ_i tels que :

$$\begin{cases} \vec{\mathbf{u}}_i = (\dot{\mathbf{u}}_{x_i}, \dot{\mathbf{u}}_{z_i}, \dot{\mathbf{w}}_{x_i}, \dot{\mathbf{w}}_{z_i})^t , \\ \vec{\mathbf{T}}_i = (\mathbf{T}_{1_i}, \mathbf{T}_{2_i}, \mathbf{T}_{3_i}, \mathbf{T}_{4_i})^t , \end{cases}$$

et que l'on fait l'hypothèse que toutes les fonctions de base sont de la même famille (du type $\vec{\varphi}_{ij}$, $1 \leq j \leq d_i$) pour chaque champ de contraintes et de vitesses, on peut écrire le système sous forme compacte :

$$\begin{aligned} i\omega (\mathbf{I}_3 \otimes \mathcal{K}_i \vec{\mathbf{u}}_i) = & - \sum_{\alpha \in (x,z)} \frac{1}{\rho_{1_i}} (s_\alpha \mathbf{N}_{\alpha_1} \otimes \mathcal{E}_{i\alpha} \vec{\mathbf{T}}_i) - \sum_{\alpha \in (x,z)} \frac{1}{\rho_{2_i}} (s_\alpha \mathbf{N}_{\alpha_2} \otimes \mathcal{E}_{i\alpha} \vec{\mathbf{T}}_i) \\ & - \sum_{\alpha \in (x,z)} \frac{1}{\rho_{2_i}} (s_\alpha \mathbf{N}_{\alpha_3} \otimes \mathcal{E}_{i\alpha} \vec{\mathbf{T}}_i) - \sum_{\alpha \in (x,z)} \frac{1}{\rho_{3_i}} (s_\alpha \mathbf{N}_{\alpha_4} \otimes \mathcal{E}_{i\alpha} \vec{\mathbf{T}}_i) \\ & + \frac{1}{2} \sum_{k \in V(i)} \left[\frac{1}{\rho_{1_i}} (\mathcal{P}_{ik}^1 \otimes \mathcal{F}_{ik} \vec{\mathbf{T}}_i) + \frac{1}{\rho_{1_k}} (\mathcal{P}_{ik}'^1 \otimes \mathcal{G}_{ik} \vec{\mathbf{T}}_k) \right] \\ & + \frac{1}{2} \sum_{k \in V(i)} \left[\frac{1}{\rho_{2_i}} (\mathcal{P}_{ik}^2 \otimes \mathcal{F}_{ik} \vec{\mathbf{T}}_i) + \frac{1}{\rho_{2_k}} (\mathcal{P}_{ik}'^2 \otimes \mathcal{G}_{ik} \vec{\mathbf{T}}_k) \right] \\ & + \frac{1}{2} \sum_{k \in V(i)} \left[\frac{1}{\rho_{2_i}} (\mathcal{P}_{ik}^3 \otimes \mathcal{F}_{ik} \vec{\mathbf{T}}_i) + \frac{1}{\rho_{2_k}} (\mathcal{P}_{ik}'^3 \otimes \mathcal{G}_{ik} \vec{\mathbf{T}}_k) \right] \\ & + \frac{1}{2} \sum_{k \in V(i)} \left[\frac{1}{\rho_{3_i}} (\mathcal{P}_{ik}^4 \otimes \mathcal{F}_{ik} \vec{\mathbf{T}}_i) + \frac{1}{\rho_{3_k}} (\mathcal{P}_{ik}'^4 \otimes \mathcal{G}_{ik} \vec{\mathbf{T}}_k) \right] \\ & + \mathbf{I}_3 \otimes \mathcal{K}_i \vec{\mathbf{F}}_i , \end{aligned} \tag{A.26}$$

$$\begin{aligned} i\omega (\mathbf{I}_3 \otimes \mathcal{K}_i \vec{\mathbf{T}}_i) = & - \sum_{\alpha \in (x,z)} (\lambda_{U_i} + G_i) (s_\alpha \mathbf{M}_{\alpha_1} \otimes \mathcal{E}_{i\alpha} \vec{\mathbf{u}}_i) - \sum_{\alpha \in (x,z)} C_i (s_\alpha \mathbf{M}_{\alpha_2} \otimes \mathcal{E}_{i\alpha} \vec{\mathbf{u}}_i) \\ & - \sum_{\alpha \in (x,z)} G_i (s_\alpha \mathbf{M}_{\alpha_3} \otimes \mathcal{E}_{i\alpha} \vec{\mathbf{u}}_i) - \sum_{\alpha \in (x,z)} C_i (s_\alpha \mathbf{M}_{\alpha_4} \otimes \mathcal{E}_{i\alpha} \vec{\mathbf{u}}_i) \\ & - \sum_{\alpha \in (x,z)} M_i (s_\alpha \mathbf{M}_{\alpha_5} \otimes \mathcal{E}_{i\alpha} \vec{\mathbf{u}}_i) \\ & + \frac{1}{2} \sum_{k \in V(i)} \left[(\lambda_{U_i} + G_i) (\mathcal{Q}_{ik}^1 \otimes \mathcal{F}_{ik} \vec{\mathbf{u}}_i) + (\lambda_{U_i} + G_i) (\mathcal{Q}_{ik}'^1 \otimes \mathcal{G}_{ik} \vec{\mathbf{u}}_k) \right] \\ & + \frac{1}{2} \sum_{k \in V(i)} \left[C_i (\mathcal{Q}_{ik}^2 \otimes \mathcal{F}_{ik} \vec{\mathbf{u}}_i) + C_i (\mathcal{Q}_{ik}'^2 \otimes \mathcal{G}_{ik} \vec{\mathbf{u}}_k) \right] \\ & + \frac{1}{2} \sum_{k \in V(i)} \left[G_i (\mathcal{Q}_{ik}^3 \otimes \mathcal{F}_{ik} \vec{\mathbf{u}}_i) + G_i (\mathcal{Q}_{ik}'^3 \otimes \mathcal{G}_{ik} \vec{\mathbf{u}}_k) \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{1}{2} \sum_{k \in V(i)} \left[C_i (\mathcal{Q}_{ik}^4 \otimes \mathcal{F}_{ik} \vec{\mathbf{u}}_i) + C_i (\mathcal{Q}_{ik}'^4 \otimes \mathcal{G}_{ik} \vec{\mathbf{u}}_k) \right] \\
 & + \frac{1}{2} \sum_{k \in V(i)} \left[M_i (\mathcal{Q}_{ik}^5 \otimes \mathcal{F}_{ik} \vec{\mathbf{u}}_i) + M_i (\mathcal{Q}_{ik}'^5 \otimes \mathcal{G}_{ik} \vec{\mathbf{u}}_k) \right] \\
 & - i\omega (\mathbf{I}_3 \otimes \mathcal{K}_i \vec{\mathbf{T}}_i^0) ,
 \end{aligned}$$

avec l'expression des différentes matrices. La matrice de masse \mathcal{K}_i est définie par une intégration surfacique sur la cellule τ_i :

$$(\mathcal{K}_i)_{jk} = \int_{\tau_i} \varphi_{ij} \varphi_{ik} d\tau \quad 1 \leq j, k \leq d_i . \quad (\text{A.27})$$

Les matrices $\mathcal{E}_{i\alpha}$ sont également définies par une intégration surfacique sur τ_i :

$$(\mathcal{E}_{i\alpha})_{jk} = \int_{\tau_i} (\partial_\alpha \varphi_{ij}) \varphi_{ik} d\tau \quad 1 \leq j, k \leq d_i . \quad (\text{A.28})$$

Les matrices \mathcal{F}_{ik} et \mathcal{G}_{ik} sont définies par une intégration linéique sur l'interface τ_{ik} entre les cellules τ_i et τ_k :

$$(\mathcal{F}_{ik})_{jr} = \int_{\tau_{ik}} \varphi_{ij} \varphi_{ir} d\tau \quad 1 \leq j, r \leq d_i , \quad (\text{A.29})$$

$$(\mathcal{G}_{ik})_{js} = \int_{\tau_{ik}} \varphi_{ij} \varphi_{ks} d\tau \quad 1 \leq j \leq d_i \quad 1 \leq s \leq d_k . \quad (\text{A.30})$$

De plus, on définit le produit tensoriel \otimes pour chaque matrice $\mathcal{A} = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{n,m}$ avec $1 \leq i \leq n$ et $1 \leq j \leq m$ et $\mathcal{B} = (b_{ij}) \in \mathcal{M}_{p,q}$ avec $1 \leq i \leq p$ et $1 \leq j \leq q$ tel que :

$$\mathcal{A} \otimes \mathcal{B} = \begin{bmatrix} a_{11}\mathcal{B} & \dots & a_{1m}\mathcal{B} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}\mathcal{B} & \dots & a_{nm}\mathcal{B} \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{np,mq} . \quad (\text{A.31})$$

A.2.4 Système générique

En supposant que les matrices de masse sont inversibles, on peut introduire les matrices suivantes

$$\begin{cases} \hat{\mathcal{E}}_{i\alpha} = A_i \mathcal{K}_i^{-1} \mathcal{E}_{i\alpha} & \alpha = (x, z) , \\ \hat{\mathcal{F}}_{ij} = A_i \mathcal{K}_i^{-1} \mathcal{F}_{ij} & j = (1, 2, 3) , \\ \hat{\mathcal{G}}_{ij} = A_i \mathcal{K}_i^{-1} \mathcal{G}_{ij} & j = (1, 2, 3) . \end{cases} \quad (\text{A.32})$$

Les matrices \mathcal{F}_{ik} et \mathcal{G}_{ik} sont des matrices de flux associées respectivement à la cellule i et k . Ces deux matrices sont égales si le degré d'interpolation dans chaque cellule est le même. On peut donc ensuite développer terme à terme le système pour exprimer les huit champs tels que :

$$i\omega A_i \vec{\mathbf{u}}_{x_i} = -\frac{1}{\rho_{1_i}} \left[s_{i_x} \hat{\mathcal{E}}_{i_x} (\vec{\mathbf{T}}_{1_i} + \vec{\mathbf{T}}_{2_i}) + s_{i_z} \hat{\mathcal{E}}_{i_z} \vec{\mathbf{T}}_{3_i} \right] - \frac{1}{\rho_{2_i}} \left[s_{i_x} \hat{\mathcal{E}}_{i_x} \vec{\mathbf{T}}_{4_i} \right]$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{1}{2} \sum_{k \in V(i)} \hat{\mathcal{F}}_{ik} \left(\frac{1}{\rho_{1_i}} \left[(\vec{T}_{1_i} + \vec{T}_{2_i}) s_{i_x} n_{ik_x} + \vec{T}_{3_i} s_{i_z} n_{ik_z} \right] + \frac{1}{\rho_{2_i}} \vec{T}_{4_i} s_{i_x} n_{ik_x} \right) \\
 & + \frac{1}{2} \sum_{k \in V(i)} \hat{\mathcal{G}}_{ik} \left(\frac{1}{\rho_{1_k}} \left[(\vec{T}_{1_k} + \vec{T}_{2_k}) s_{k_x} n_{ik_x} + \vec{T}_{3_k} s_{k_z} n_{ik_z} \right] + \frac{1}{\rho_{2_k}} \vec{T}_{4_k} s_{k_x} n_{ik_x} \right) \\
 & + \mathcal{K}_i \vec{F}_{\dot{u}_{xi}} , \\
 i\omega A_i \vec{u}_{zi} &= -\frac{1}{\rho_{1_i}} \left[s_{i_x} \hat{\mathcal{E}}_{i_x} \vec{T}_{3_i} + s_{i_z} \hat{\mathcal{E}}_{i_z} (\vec{T}_{1_i} - \vec{T}_{2_i}) \right] - \frac{1}{\rho_{2_i}} \left[s_{i_z} \hat{\mathcal{E}}_{i_z} \vec{T}_{4_i} \right] \\
 & + \frac{1}{2} \sum_{k \in V(i)} \hat{\mathcal{F}}_{ik} \left(\frac{1}{\rho_{1_i}} \left[\vec{T}_{3_i} s_{i_x} n_{ik_x} + (\vec{T}_{1_i} - \vec{T}_{2_i}) s_{i_z} n_{ik_z} \right] + \frac{1}{\rho_{2_i}} \vec{T}_{4_i} s_{i_z} n_{ik_z} \right) \\
 & + \frac{1}{2} \sum_{k \in V(i)} \hat{\mathcal{G}}_{ik} \left(\frac{1}{\rho_{1_k}} \left[\vec{T}_{3_k} s_{k_x} n_{ik_x} + (\vec{T}_{1_k} - \vec{T}_{2_k}) s_{k_z} n_{ik_z} \right] + \frac{1}{\rho_{2_k}} \vec{T}_{4_k} s_{k_z} n_{ik_z} \right) \\
 & + \mathcal{K}_i \vec{F}_{\dot{u}_{zi}} , \\
 i\omega A_i \vec{w}_{xi} &= -\frac{1}{\rho_{2_i}} \left[s_{i_x} \hat{\mathcal{E}}_{i_x} (\vec{T}_{1_i} + \vec{T}_{2_i}) + s_{i_z} \hat{\mathcal{E}}_{i_z} \vec{T}_{3_i} \right] - \frac{1}{\rho_{3_i}} \left[s_{i_x} \hat{\mathcal{E}}_{i_x} \vec{T}_{4_i} \right] \\
 & + \frac{1}{2} \sum_{k \in V(i)} \hat{\mathcal{F}}_{ik} \left(\frac{1}{\rho_{2_i}} \left[(\vec{T}_{1_i} + \vec{T}_{2_i}) s_{i_x} n_{ik_x} + \vec{T}_{3_i} s_{i_z} n_{ik_z} \right] + \frac{1}{\rho_{3_i}} \vec{T}_{4_i} s_{i_x} n_{ik_x} \right) \\
 & + \frac{1}{2} \sum_{k \in V(i)} \hat{\mathcal{G}}_{ik} \left(\frac{1}{\rho_{2_k}} \left[(\vec{T}_{1_k} + \vec{T}_{2_k}) s_{k_x} n_{ik_x} + \vec{T}_{3_k} s_{k_z} n_{ik_z} \right] + \frac{1}{\rho_{3_k}} \vec{T}_{4_k} s_{k_x} n_{ik_x} \right) \\
 & + \mathcal{K}_i \vec{F}_{\dot{w}_{xi}} , \\
 i\omega A_i \vec{w}_{zi} &= -\frac{1}{\rho_{2_i}} \left[s_{i_x} \hat{\mathcal{E}}_{i_x} \vec{T}_{3_i} + s_{i_z} \hat{\mathcal{E}}_{i_z} (\vec{T}_{1_i} - \vec{T}_{2_i}) \right] - \frac{1}{\rho_{3_i}} \left[s_{i_z} \hat{\mathcal{E}}_{i_z} \vec{T}_{4_i} \right] \\
 & + \frac{1}{2} \sum_{k \in V(i)} \hat{\mathcal{F}}_{ik} \left(\frac{1}{\rho_{2_i}} \left[\vec{T}_{3_i} s_{i_x} n_{ik_x} + (\vec{T}_{1_i} - \vec{T}_{2_i}) s_{i_z} n_{ik_z} \right] + \frac{1}{\rho_{3_i}} \vec{T}_{4_i} s_{i_z} n_{ik_z} \right) \\
 & + \frac{1}{2} \sum_{k \in V(i)} \hat{\mathcal{G}}_{ik} \left(\frac{1}{\rho_{2_k}} \left[\vec{T}_{3_k} s_{k_x} n_{ik_x} + (\vec{T}_{1_k} - \vec{T}_{2_k}) s_{k_z} n_{ik_z} \right] + \frac{1}{\rho_{3_k}} \vec{T}_{4_k} s_{k_z} n_{ik_z} \right) \\
 & + \mathcal{K}_i \vec{F}_{\dot{w}_{zi}} , \tag{A.33} \\
 -i\omega A_i \vec{T}_{1_i} &= -(\lambda_{U_i} + G_i) \left(s_{i_x} \hat{\mathcal{E}}_{i_x} \vec{u}_{xi} + s_{i_z} \hat{\mathcal{E}}_{i_z} \vec{u}_{zi} \right) - C_i \left(s_{i_x} \hat{\mathcal{E}}_{i_x} \vec{w}_{xi} + s_{i_z} \hat{\mathcal{E}}_{i_z} \vec{w}_{zi} \right) \\
 & + \frac{1}{2} \sum_{k \in V(i)} \hat{\mathcal{F}}_{ik} \left((\lambda_{U_i} + G_i) \left[\vec{u}_{xi} s_{i_x} n_{ik_x} + \vec{u}_{zi} s_{i_z} n_{ik_z} \right] + C_i \left[\vec{w}_{xi} s_{i_x} n_{ik_x} + \vec{w}_{zi} s_{i_z} n_{ik_z} \right] \right) \\
 & + \frac{1}{2} \sum_{k \in V(i)} \hat{\mathcal{G}}_{ik} \left((\lambda_{U_k} + G_k) \left[\vec{u}_{xk} s_{k_x} n_{ik_x} + \vec{u}_{zk} s_{k_z} n_{ik_z} \right] + C_k \left[\vec{w}_{xk} s_{k_x} n_{ik_x} + \vec{w}_{zk} s_{k_z} n_{ik_z} \right] \right) \\
 & - i\omega \mathcal{K}_i \vec{T}_{1_i}^0 ,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 -i\omega A_i \vec{T}_{2i} &= -G_i \left(s_{i_x} \hat{\mathcal{E}}_{i_x} \vec{u}_{x_i} - s_{i_z} \hat{\mathcal{E}}_{i_z} \vec{u}_{z_i} \right) \\
 &+ \frac{1}{2} \sum_{k \in V(i)} \hat{\mathcal{F}}_{ik} G_i \left[\vec{u}_{x_i} s_{i_x} n_{ik_x} - \vec{u}_{z_i} s_{i_z} n_{ik_z} \right] \\
 &+ \frac{1}{2} \sum_{k \in V(i)} \hat{\mathcal{G}}_{ik} G_k \left[\vec{u}_{x_k} s_{k_x} n_{ik_x} - \vec{u}_{z_k} s_{k_z} n_{ik_z} \right] \\
 &- i\omega \mathcal{K}_i \vec{T}_{2i}^0, \\
 \\
 -i\omega A_i \vec{T}_{3i} &= -G_i \left(s_{i_z} \hat{\mathcal{E}}_{i_z} \vec{u}_{x_i} + s_{i_x} \hat{\mathcal{E}}_{i_x} \vec{u}_{z_i} \right) \\
 &+ \frac{1}{2} \sum_{k \in V(i)} \hat{\mathcal{F}}_{ik} G_i \left[\vec{u}_{x_i} s_{i_z} n_{ik_z} + \vec{u}_{z_i} s_{i_x} n_{ik_x} \right] \\
 &+ \frac{1}{2} \sum_{k \in V(i)} \hat{\mathcal{G}}_{ik} G_k \left[\vec{u}_{x_k} s_{k_z} n_{ik_z} + \vec{u}_{z_k} s_{k_x} n_{ik_x} \right] \\
 &- i\omega \mathcal{K}_i \vec{T}_{3i}^0, \\
 \\
 -i\omega A_i \vec{T}_{4i} &= -C_i \left(s_{i_x} \hat{\mathcal{E}}_{i_x} \vec{u}_{x_i} + s_{i_z} \hat{\mathcal{E}}_{i_z} \vec{u}_{z_i} \right) - M_i \left(s_{i_x} \hat{\mathcal{E}}_{i_x} \vec{w}_{x_i} + s_{i_z} \hat{\mathcal{E}}_{i_z} \vec{w}_{z_i} \right) \\
 &+ \frac{1}{2} \sum_{k \in V(i)} \hat{\mathcal{F}}_{ik} \left(C_i \left[\vec{u}_{x_i} s_{i_x} n_{ik_x} + \vec{u}_{z_i} s_{i_z} n_{ik_z} \right] + M_i \left[\vec{w}_{x_i} s_{i_x} n_{ik_x} + \vec{w}_{z_i} s_{i_z} n_{ik_z} \right] \right) \\
 &+ \frac{1}{2} \sum_{k \in V(i)} \hat{\mathcal{G}}_{ik} \left(C_k \left[\vec{u}_{x_k} s_{k_x} n_{ik_x} + \vec{u}_{z_k} s_{k_z} n_{ik_z} \right] + M_k \left[\vec{w}_{x_k} s_{k_x} n_{ik_x} + \vec{w}_{z_k} s_{k_z} n_{ik_z} \right] \right) \\
 &- i\omega \mathcal{K}_i \vec{T}_{4i}^0.
 \end{aligned} \tag{A.34}$$

A.2.5 Système matriciel linéaire

Le système générique des équations de la poroélastodynamique 2D discrétisé en éléments finis discontinus est écrit sous forme éclatée dans les équations A.33 (déplacements) et A.34 (contraintes). Dans ce système, les fonctions de base permettant de projeter les champs dans les cellules peuvent être choisies dans un large panel. Classiquement, pour des problèmes de propagation d'ondes mécaniques, on utilise des fonctions polynomiales d'ordre k ($k = (1, 3)$) (voir par exemple, Brossier (2009); Etienne (2011); Käser & Dumbser (2006); de la Puente *et al.* (2008)). Quel que soit le degré d'interpolation choisi, le système (A.33, A.34) se ramène à un système matriciel linéaire

$$\mathcal{A} \cdot \vec{x} = \vec{b}, \tag{A.35}$$

où \mathcal{A} est la matrice d'impédance dont les termes dépendent des propriétés physiques, de la fréquence, du type de maillage et du degré d'interpolation de chaque cellule. \vec{x} est le vecteur contenant les champs de contraintes et de déplacements et \vec{b} contient les termes sources.

A.2.6 Détail des termes du système linéaire, ordre P0

Le développement du système (A.33,A.34) en choisissant des polynômes de degré 0 comme fonctions de base, ce qu'on nomme interpolation P0, est en partie décrite dans la partie 2.1.4.2 de l'article. Cela revient à considérer que les paramètres et les champs sont constants par partie dans chaque cellule, une seule fonction de base est utilisée par cellule et sa valeur est 1. Cela implique que les matrices \mathcal{K}_i , E_{ix} , F_{ik} et G_{ik} sont des scalaires (matrices de dimension 1×1). L'intégration des matrices donne donc

$$\begin{cases} \mathcal{K}_i = A_i , \\ \mathcal{E}_{i\alpha} = 0 , \\ \mathcal{F}_{ik} = l_k , \\ \mathcal{G}_{ik} = l_k , \end{cases} \quad (\text{A.36})$$

où l_k est la longueur de l'interface.

Le vecteur \vec{x} est donc défini de la façon suivante pour chaque cellule i , i variant de 1 à n (n est le nombre de cellules du modèle) :

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} \dots \\ \dot{u}_{xi} \\ \dot{u}_{zi} \\ \dot{w}_{xi} \\ \dot{w}_{zi} \\ T_{1i} \\ T_{2i} \\ T_{3i} \\ T_{4i} \\ \dots \end{pmatrix} . \quad (\text{A.37})$$

Le vecteur \vec{b} est donc constitué des huit termes de forces externes/contraintes initiales associées aux huit équations du système pour la cellule d'indice i :

$$\vec{b} = \begin{pmatrix} \dots \\ b_{1i} \\ b_{2i} \\ b_{3i} \\ b_{4i} \\ b_{5i} \\ b_{6i} \\ b_{7i} \\ b_{8i} \\ \dots \end{pmatrix} . \quad (\text{A.38})$$

Les termes b_{α_i} ($\alpha \in (1;8)$) s'écrivent

$$b_{1i} = i\omega A_i \left(-\frac{F_{\sigma_{xi}}}{\rho_{1i}} + \frac{F_{P_{xi}}}{\rho_{2i}} \right) ,$$

$$\begin{aligned}
b_{2i} &= i\omega A_i \left(-\frac{F_{\sigma_{zi}}}{\rho_{1i}} + \frac{F_{P_{zi}}}{\rho_{2i}} \right), \\
b_{3i} &= i\omega A_i \left(-\frac{F_{\sigma_{xi}}}{\rho_{2i}} + \frac{F_{P_{xi}}}{\rho_{3i}} \right), \\
b_{4i} &= i\omega A_i \left(-\frac{F_{\sigma_{zi}}}{\rho_{2i}} + \frac{F_{P_{zi}}}{\rho_{3i}} \right), \\
b_{5i} &= \omega^2 A_i T_{1i}^0, \\
b_{6i} &= \omega^2 A_i T_{2i}^0, \\
b_{7i} &= \omega^2 A_i T_{3i}^0, \\
b_{8i} &= \omega^2 A_i T_{4i}^0.
\end{aligned} \tag{A.39}$$

La construction de la matrice d'impédance \mathbf{A} doit être réalisée en cohérence avec cette définition du vecteur des inconnues à calculer. On aura des contributions au sein de la cellule i et des cellules voisines indicées j . Les autres cellules n'interagissent pas avec la cellule i en raison de l'aspect local de l'intégration, donnant ainsi une matrice \mathbf{A} particulièrement creuse. En effet, pour chaque ligne, on a 1 terme sur la cellule courante i et 4 termes sur les 3 cellules triangulaires voisines j donc 13 termes par ligne ($1 + 4 \times 3$). Et comme on a 8 lignes associées à chaque cellule i , on obtient un total de 104 termes non nuls par cellules, donc avec n cellules, nous aurons $104 * n$ termes non nuls.

Le détail de chacun des termes des 8 lignes associées à la cellule i est le suivant :

Première ligne associée à la cellule i (\dot{u}_{xi}) :

$$\begin{aligned}
A_{1i}^{\dot{u}_x} &= -\omega^2 A_i, \\
A_{1j}^{T_1} &= i\omega l_{ij} n_{ijx} s_{xj} \frac{1}{2\rho_{1i}}, \\
A_{1j}^{T_2} &= i\omega l_{ij} n_{ijx} s_{xj} \frac{1}{2\rho_{1i}}, \\
A_{1j}^{T_3} &= i\omega l_{ij} n_{ijz} s_{zj} \frac{1}{2\rho_{1i}}, \\
A_{1j}^{T_4} &= i\omega l_{ij} n_{ijx} s_{xj} \frac{1}{2\rho_{2i}}.
\end{aligned} \tag{A.40}$$

Deuxième ligne associée à la cellule i (\dot{u}_{zi}) :

$$\begin{aligned}
A_{2i}^{\dot{u}_z} &= -\omega^2 A_i, \\
A_{2j}^{T_1} &= i\omega l_{ij} n_{ijz} s_{zj} \frac{1}{2\rho_{1i}}, \\
A_{2j}^{T_2} &= -i\omega l_{ij} n_{ijz} s_{zj} \frac{1}{2\rho_{1i}}, \\
A_{2j}^{T_3} &= i\omega l_{ij} n_{ijx} s_{xj} \frac{1}{2\rho_{1i}}, \\
A_{2j}^{T_4} &= i\omega l_{ij} n_{ijz} s_{zj} \frac{1}{2\rho_{2i}}.
\end{aligned} \tag{A.41}$$

Troisième ligne associée à la cellule i (\dot{w}_{xi}) :

$$A_{3i}^{\dot{w}_x} = -\omega^2 A_i,$$

$$\begin{aligned}
 A_{3j}^{T_1} &= i\omega l_{ij} n_{ijx} t_{xj} \frac{1}{2\rho_{2i}} , \\
 A_{3j}^{T_2} &= i\omega l_{ij} n_{ijx} t_{xj} \frac{1}{2\rho_{2i}} , \\
 A_{3j}^{T_3} &= i\omega l_{ij} n_{ijz} t_{zj} \frac{1}{2\rho_{2i}} , \\
 A_{3j}^{T_4} &= i\omega l_{ij} n_{ijx} t_{xj} \frac{1}{2\rho_{3i}} .
 \end{aligned} \tag{A.42}$$

Quatrième ligne associée à la cellule i (\dot{w}_{zi}) :

$$\begin{aligned}
 A_{4i}^{\dot{w}_z} &= -\omega^2 A_i , \\
 A_{4j}^{T_1} &= i\omega l_{ij} n_{ijz} t_{zj} \frac{1}{2\rho_{2i}} , \\
 A_{4j}^{T_2} &= -i\omega l_{ij} n_{ijz} t_{zj} \frac{1}{2\rho_{2i}} , \\
 A_{4j}^{T_3} &= i\omega l_{ij} n_{ijx} t_{xj} \frac{1}{2\rho_{2i}} , \\
 A_{4j}^{T_4} &= i\omega l_{ij} n_{ijz} t_{zj} \frac{1}{2\rho_{3i}} .
 \end{aligned} \tag{A.43}$$

Cinquième ligne associée à la cellule i (T_{1i}) :

$$\begin{aligned}
 A_{5i}^{T_1} &= \omega^2 A_i , \\
 A_{5j}^{\dot{u}_x} &= \frac{i\omega}{2} l_{ij} n_{ijx} s'_{xj} (\lambda_{Ui} + G_i) , \\
 A_{5j}^{\dot{u}_z} &= \frac{i\omega}{2} l_{ij} n_{ijz} s'_{zj} (\lambda_{Ui} + G_i) , \\
 A_{5j}^{\dot{w}_x} &= \frac{i\omega}{2} l_{ij} n_{ijx} t'_{xj} C_i , \\
 A_{5j}^{\dot{w}_z} &= \frac{i\omega}{2} l_{ij} n_{ijz} t'_{zj} C_i .
 \end{aligned} \tag{A.44}$$

Sixième ligne associée à la cellule i (T_{2i}) :

$$\begin{aligned}
 A_{6i}^{T_2} &= \omega^2 A_i , \\
 A_{6j}^{\dot{u}_x} &= \frac{i\omega}{2} l_{ij} n_{ijx} s'_{xj} G_i , \\
 A_{6j}^{\dot{u}_z} &= -\frac{i\omega}{2} l_{ij} n_{ijz} s'_{zj} G_i , \\
 A_{6j}^{\dot{w}_x} &= A_{6j}^{\dot{w}_z} = 0 .
 \end{aligned} \tag{A.45}$$

Septième ligne associée à la cellule i (T_{3i}) :

$$\begin{aligned}
 A_{7i}^{T_3} &= \omega^2 A_i , \\
 A_{7j}^{\dot{u}_x} &= \frac{i\omega}{2} l_{ij} n_{ijz} s'_{zj} G_i , \\
 A_{7j}^{\dot{u}_z} &= \frac{i\omega}{2} l_{ij} n_{ijx} s'_{xj} G_i ,
 \end{aligned}$$

$$A_{7j}^{\dot{w}_x} = A_{7j}^{\dot{w}_z} = 0 . \quad (\text{A.46})$$

Huitième ligne associée à la cellule i (T_{4i}) :

$$\begin{aligned} A_{8i}^{T_4} &= \omega^2 A_i , \\ A_{8j}^{\dot{u}_x} &= \frac{i\omega}{2} l_{ij} n_{ijx} s'_{xj} C_i , \\ A_{8j}^{\dot{u}_z} &= \frac{i\omega}{2} l_{ij} n_{ijz} s'_{zj} C_i , \\ A_{8j}^{\dot{w}_x} &= \frac{i\omega}{2} l_{ij} n_{ijx} t'_{xj} M_i , \\ A_{8j}^{\dot{w}_z} &= \frac{i\omega}{2} l_{ij} n_{ijz} t'_{zj} M_i . \end{aligned} \quad (\text{A.47})$$

A.2.7 Développement des matrices de forme, ordre P1

L'interpolation polynomial de degré 1 (P1) a été effectuée en deux dimensions sur les équations de l'élastodynamique par Brossier (2009). Moyennant des hypothèses géométriques sur l'expression des fonctions de base, on intègre les matrices \mathcal{K}_i , E_{i_x} , F_{ik} et G_{ik} , ce qui permet de calculer les matrices finales $\hat{\mathcal{E}}_{i_x}$, $\hat{\mathcal{E}}_{i_z}$, $\hat{\mathcal{F}}_{i1}$, $\hat{\mathcal{F}}_{i2}$ et $\hat{\mathcal{F}}_{i3}$. Comme les degrés d'interpolations sont égaux pour chaque cellule, on a $\mathcal{F}_{ik} = \mathcal{G}_{ik}$:

$$\hat{\mathcal{E}}_{i_x} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} e_{1x} & e_{1x} & e_{1x} \\ e_{2x} & e_{2x} & e_{2x} \\ e_{3x} & e_{3x} & e_{3x} \end{bmatrix} , \quad (\text{A.48})$$

$$\hat{\mathcal{E}}_{i_z} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} e_{1z} & e_{1z} & e_{1z} \\ e_{2z} & e_{2z} & e_{2z} \\ e_{3z} & e_{3z} & e_{3z} \end{bmatrix} , \quad (\text{A.49})$$

$$\hat{\mathcal{F}}_{i1} = \frac{l_1}{2} \begin{bmatrix} 0 & -3 & -3 \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & 5 \end{bmatrix} , \quad (\text{A.50})$$

$$\hat{\mathcal{F}}_{i2} = \frac{l_2}{2} \begin{bmatrix} 5 & 0 & 1 \\ -3 & 0 & -3 \\ 1 & 0 & 5 \end{bmatrix} , \quad (\text{A.51})$$

$$\hat{\mathcal{F}}_{i3} = \frac{l_3}{2} \begin{bmatrix} 5 & 1 & 0 \\ 1 & 5 & 0 \\ -3 & -3 & 0 \end{bmatrix} . \quad (\text{A.52})$$

avec

$$\begin{cases} e_{1x} = -3 l_1 n_{i1x} + l_2 n_{i2x} + l_3 n_{i3x} , \\ e_{2x} = l_1 n_{i1x} - 3 l_2 n_{i2x} + l_3 n_{i3x} , \\ e_{3x} = l_1 n_{i1x} + l_2 n_{i2x} - 3 l_3 n_{i3x} , \\ e_{1z} = -3 l_1 n_{i1z} + l_2 n_{i2z} + l_3 n_{i3z} , \\ e_{2z} = l_1 n_{i1z} - 3 l_2 n_{i2z} + l_3 n_{i3z} , \\ e_{3z} = l_1 n_{i1z} + l_2 n_{i2z} - 3 l_3 n_{i3z} . \end{cases} \quad (\text{A.53})$$

D'autre part, l'approche discontinue implique que des cellules voisines peuvent avoir des degrés d'interpolations différents. On donne ici l'exemple du développement des matrices pour une interface entre une cellule P0 et une cellule P1. A l'interface P0-P1, on calcule les matrices $\hat{\mathcal{G}}_{ik}$ avec $k = (1, 2, 3)$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{\mathcal{G}}_{i1} = \frac{l_1}{2} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} , \\ \hat{\mathcal{G}}_{i2} = \frac{l_2}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} , \\ \hat{\mathcal{G}}_{i3} = \frac{l_3}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} . \end{array} \right. \quad (\text{A.54})$$

De même, à l'interface P1-P0, on a :

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{\mathcal{G}}_{i1} = \frac{l_1}{2} \begin{bmatrix} -6 \\ 6 \\ 6 \end{bmatrix} , \\ \hat{\mathcal{G}}_{i2} = \frac{l_2}{2} \begin{bmatrix} 6 \\ -6 \\ 6 \end{bmatrix} , \\ \hat{\mathcal{G}}_{i3} = \frac{l_3}{2} \begin{bmatrix} 6 \\ 6 \\ -6 \end{bmatrix} . \end{array} \right. \quad (\text{A.55})$$

L'expression des matrices de forme \mathcal{K}_i , E_{ix} , F_{ik} et G_{ik} peut ainsi être calculé à tout ordre d'interpolation polynomiale. Dans le code numérique développé pendant ma thèse, on se limite à des degrés d'interpolations compris entre 0 et 2.

Annexe B

Publication complémentaire

Sommaire

B.1 Using a poroelastic theory to reconstruct subsurface properties : numerical investigation	232
--	------------

**Using a poroelastic theory to reconstruct subsurface properties :
numerical investigation**

L. De Barros, B. Dupuy, G. O'Brien, J. Virieux, S. Garambois
Seismic Waves, Research and Analysis, 2011, ed. Dr K. Masaki, In press

Cet article a été écrit en collaboration avec Louis de Barros et Gareth O'Brien de l'University College of Dublin et publié par De Barros *et al.* (2011). Il présente une étude de faisabilité numérique sur l'inversion des paramètres poroélastiques dans les milieux de subsurface. Après une première partie décrivant la théorie classique de Biot-Gassmann et la façon de mieux prendre en compte les atténuations (par exemple, par les milieux double porosité), on utilise trois techniques numériques pour modéliser la propagation des ondes dans les milieux poreux : une méthode différences finies 3D dans le domaine temps-espace, une méthode de réflectivité dans les milieux stratifiés 3D dans le domaine fréquence-nombres d'ondes et une méthode d'éléments finies discontinus (Galerkin discontinu) 2D dans le domaine fréquence-espace. Des exemples de modélisations dans des milieux poreux simple et double porosité comparées avec des modélisations élastiques équivalentes montrent les différences importantes dues à la prise en compte des phénomènes poroélastiques. La sensibilité des paramètres poroélastiques est ensuite analysée et montre que les paramètres ont des sensibilités très variables et certains sont fortement couplés. Enfin, un exemple d'inversion poroélastique des formes d'ondes complètes est présenté et montre que l'inversion différentielle est la méthode la plus à même pour résoudre les forts couplages entre paramètres poroélastiques et pour réussir à inverser ces paramètres de façon fiable et robuste.

Using a poroelastic theory to reconstruct subsurface properties: numerical investigation

Louis De Barros¹, Bastien Dupuy², Gareth S. O'Brien¹, Jean Virieux²,
Stéphane Garambois²

¹ School of Geological Sciences, University College Dublin, Ireland

² ISTerre, CNRS - Université J. Fourier, Grenoble, France

1. Introduction

The quantitative imaging of the subsurface is a major challenge in geophysics. In oil and gas exploration and production, aquifer management and other applications such as the underground storage of CO₂, seismic imaging techniques are implemented to provide as much information as possible on fluid-filled reservoir rocks. Biot theory (Biot; 1956) and its extensions provide a convenient framework to connect the various parameters characterizing a porous medium to the wave properties, namely, their amplitudes, velocities and frequency content. The poroelastic model involves more parameters than elastodynamic theory, but on the other hand, the wave attenuation and dispersion characteristics at the macroscopic scale are determined by the medium intrinsic properties without having to resort to empirical relationships. Attenuation mechanisms at microscopic and mesoscopic scales, which are not considered in the original Biot theory, can be introduced into alternative poroelastic theories (see e.g. Pride et al.; 2004). The inverse problem, that is, the retrieval of poroelastic parameters from the seismic waveforms is much more challenging. Porosity, permeability and fluid saturation are the most important parameters for reservoir engineers. The estimation of poroelastic properties of reservoir rocks from seismic waves is however still in its infancy. The classical way of doing that is to first solve the elastic problem and then interpret the velocities in terms of poroelastic parameters by using deterministic or stochastic rock physics modelling. However, these methods do not make full use of the seismograms, as does Full Waveform Inversion (FWI).

In the poroelastic case, eight model parameters enter the medium description, compared with only one or two in the acoustic case, and three in the elastic case if wave attenuation is not taken into account. The advantages of using a poroelastic theory in FWI are (1) to directly relate seismic wave characteristics to porous media properties; (2) to use information that cannot be described by viscoelasticity or elasticity with the Gassmann (1951) formulae and (3) to open the possibility to use fluid displacement and force to determine permeability and

fluid properties.

The aim of this paper is thus to investigate the gain and the feasibility of using a poroelastic approach, rather than the classical elastic one, in full waveform methods. The forward modelling is solved using different algorithms: a reflectivity approach, a 3D finite difference scheme and a 2D discontinuous Galerkin method. The comparison of synthetic data computed in the elastic and poroelastic cases shows that poroelastic modelling leads to some typical patterns that cannot be explained by elastic theory. This proves that the use of poroelastic theories may bring more insight in the model reconstruction, particularly, in the fluid properties. Moreover, mesoscopic attenuation can be introduced in the poroelastic laws for double porosity medium, adding extra changes in the waveforms. This demonstrates the utility of using such theories to correctly reproduce measured seismic data.

Analytical formulas are then derived to compute the first-order effects produced by plane inhomogeneities on the point source seismic response of a fluid-filled stratified porous medium. The derivation is achieved by a perturbation analysis of the poroelastic wave equations in the plane-wave domain using the Born approximation. The sensitivity of the wavefields to the different model parameters can be investigated: the porosity, consolidation parameter, solid density, and mineral shear modulus emerge as the most sensitive parameters in the forward and inverse modelling problems. However, the amplitude-versus-angle response of a thin layer shows strong coupling effects between several model parameters.

The inverse problem is then tackled using a generalized least-squares, quasi-Newton approach to determine the parameters of the porous medium. Simple models consisting of plane-layered, fluid-saturated and poro-elastic media are considered to demonstrate the concept and evaluate the performance of such a full waveform inversion scheme. Numerical experiments show that, when applied to synthetic data, the inversion procedure can accurately reconstruct the vertical distribution of a single model parameter, if all other parameters are perfectly known. However, the coupling between some of the model parameters does not permit the reconstruction of several model parameters at the same time. To get around this problem, we consider composite parameters defined from the original model properties and from a priori information, such as the fluid saturation rate or the lithology, to reduce the number of unknowns. We then apply this inversion algorithm to time-lapse surveys carried out for fluid substitution problems, such as CO₂ injection, since in this case only a few parameters may vary as a function of time. A two-step differential inversion approach allows the reconstruction of the fluid saturation in reservoir layers, even though the medium properties are mainly unknown.

2. Wave propagation in stratified porous media

The governing equations for the poroelastodynamic theory were first derived by Biot (1956), and are thus often called “Biot theory”. The main hypothesis behind these equations is that the seismic wavelengths are longer than the pore size, the medium can then be described by homogenised laws. Poroelastic theories have then been derived and improved by many authors (e.g. Auriault et al.; 1985; Geertsma and Smith; 1961; Johnson et al.; 1987).

2.1 Governing equations

Assuming a $e^{-i\omega t}$ dependence, Pride et al. (1992) rewrote Biot's (1956) equations of poro-elasticity in the frequency domain in the form

$$\begin{aligned} [(K_U + G/3) \nabla \nabla + (G \nabla^2 + \omega^2 \rho) \mathbf{I}] \cdot \mathbf{u} + [C \nabla \nabla + \omega^2 \rho_f \mathbf{I}] \cdot \mathbf{w} &= 0 \\ [C \nabla \nabla + \omega^2 \rho_f \mathbf{I}] \cdot \mathbf{u} + [M \nabla \nabla + \omega^2 \tilde{\rho} \mathbf{I}] \cdot \mathbf{w} &= 0, \end{aligned} \quad (1)$$

where \mathbf{u} and \mathbf{w} respectively denote the average solid displacement and the relative fluid-to-solid displacement, ω is the angular frequency, \mathbf{I} the identity tensor, $\nabla \nabla$ the gradient of the divergence operator and ∇^2 the Laplacian operator. The other quantities appearing in equations (1) are medium properties.

The bulk density of the porous medium ρ is related to the fluid density ρ_f , solid density ρ_s and porosity ϕ :

$$\rho = (1 - \phi)\rho_s + \phi\rho_f. \quad (2)$$

K_U is the undrained bulk modulus and G is the shear modulus. M (fluid storage coefficient) and C (C-modulus) are mechanical parameters. In the quasi-static limit, at low frequencies, these parameters are real, frequency-independent and can be expressed in terms of the drained bulk modulus K_D , porosity ϕ , mineral bulk modulus K_s and fluid bulk modulus K_f (Gassmann; 1951):

$$\begin{aligned} K_U &= \frac{\phi K_D + \left[1 - (1 + \phi) \frac{K_D}{K_s}\right] K_f}{\phi(1 + \Delta)}, \\ C &= \frac{\left[1 - \frac{K_D}{K_s}\right] K_f}{\phi(1 + \Delta)}, \quad M = \frac{K_f}{\phi(1 + \Delta)} \\ \text{with } \Delta &= \frac{1 - \phi}{\phi} \frac{K_f}{K_s} \left[1 - \frac{K_D}{(1 - \phi)K_s}\right]. \end{aligned} \quad (3)$$

It is also possible to link the frame properties K_D and G to the porosity and constitutive mineral properties (Korringa et al.; 1979; Pride; 2005):

$$K_D = K_s \frac{1 - \phi}{1 + c_s \phi} \quad \text{and} \quad G = G_s \frac{1 - \phi}{1 + 3c_s \phi/2}, \quad (4)$$

where G_s is the shear modulus of the grains. The consolidation parameter c_s appearing in these expressions is not necessarily the same for K_D and G (Korringa et al.; 1979). However, to minimize the number of model parameters, and following the recommendation of Pride (2005), we consider only one consolidation parameter to describe the frame properties. c_s typically varies between 2 to 20 in a consolidated medium, but can be much greater than 20 in an unconsolidated soil.

Finally, the wave attenuation is explained by a generalized Darcy's law which uses a complex, frequency-dependent dynamic permeability $k(\omega)$ defined via the relationship (Johnson et al.;

1994):

$$\tilde{\rho} = i \frac{\eta}{\omega k(\omega)} \quad \text{with} \quad k(\omega) = k_0 / \left[\sqrt{1 - i \frac{4}{n_f} \frac{\omega}{\omega_c}} - i \frac{\omega}{\omega_c} \right]. \quad (5)$$

In equation (5), η is the viscosity of the fluid and k_0 the hydraulic permeability. Parameter n_f is considered constant and equal to 8 to simplify the equations. The relaxation frequency $\omega_c = \eta / (\rho_f F k_0)$, with F the electrical formation factor, separates the low frequency regime where viscous losses are dominant from the high frequency regime where inertial effects prevail. We refer the reader to the work of Pride (2005) for more information on the parameters used in this study.

The solution of equation (1) leads to classical fast P- and S-waves, and to an additional slow P-wave (often called Biot wave). The fast P-wave has fluid and solid motion in phase, while the Biot wave has out-of-phase motions. At low frequency, the Biot wave has a diffusive pattern and can be seen as a fluid pressure diffusion wave. At high frequency, the inertial effects are predominant. This wave becomes propagative and can be seen on data, as Plona (1980) firstly did, giving an experimental justification to the dynamic poroelasticity theory.

2.2 Mesoscopic attenuation and more complex theories

Although the slow P-wave does not appear on the seismograms at low frequency, it plays an important role in the attenuation process, as it produces loss of energy by wave-induced fluid-flow. However, the attenuation as described in the Biot theory is not strong enough to model the attenuation in the geological medium, especially at low (i.e. seismic) frequencies. Attenuation processes can actually be separated into 3 different spatial scales, namely microscopic, mesoscopic and macroscopic (Pride et al.; 2004). Within this classification, the Biot mechanism of attenuation takes place at macroscopic scale (on the order of the seismic wavelength). The microscopic attenuation is due to mechanisms that occur at the grain size, such as the squirt flow mechanism (Mavko and Jizba; 1991). This mechanism leads to attenuation mainly at high frequencies. The attenuation mechanism that prevails at low frequency is the mesoscopic attenuation (Pride et al.; 2004), which is due to fluid flow that occurs at boundaries between any medium heterogeneities whose size is between the grains and the wavelength. This is particularly true for layered medium (Gurevich et al.; 1997; Pride et al.; 2002) or when the medium contains 1) inclusions of different materials such as composite medium or double porosity medium (Pride et al.; 2004; Santos et al.; 2006), or 2) different fluids (Santos et al.; 1990) or patches of different saturation (Johnson; 2001).

Double porosity medium (DP in the text) refers to a porous medium which contains inclusions with different porosity and permeability properties (Pride et al.; 2004; Santos et al.; 2006). Assuming that the most compressible phase (patches, phase 2) is embedded into the less compressible one (host rock, phase1), the seismic properties of the phase 2 can be eliminated from the homogenised equations. This assumption allows Pride and Berryman (2003a) and Pride and Berryman (2003b) to write the DP equations under the form of the classical Biot theory (eq. 1). This involves the use of complex frequency dependent moduli K_U , C and M . These parameters are particularly function of the respective volume of each phases and of the size of the patches. a denotes here the average radius of the spherical inclusions in the host

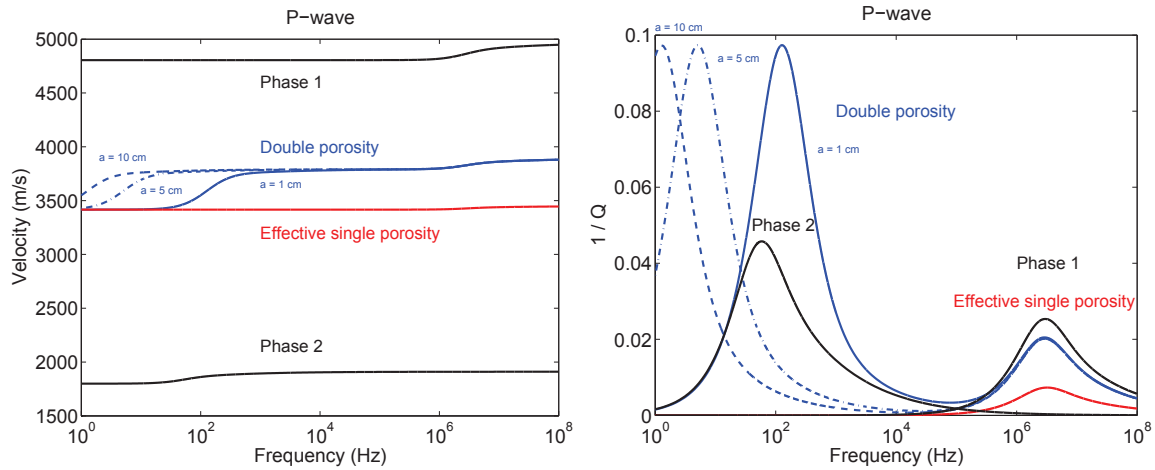


Figure 1: P-wave velocities (left panel) and attenuations (right panel) with respect to the frequency (between 1 and 10^8 Hz). Blue lines are for the double porosity theory for inclusion sizes $a = 1$ cm (continuous line), $a = 5$ cm (dotted-dashed line) and $a = 10$ cm (dashed line). Poroelastic response for the individual phases are the black lines. The results for the effective single porosity theory, computed using weighed average of each phase properties, are given in red line.

rock. Finally, as the patches are assumed to be spherical, the shear modulus of the medium is still real and not frequency dependent, and can be approximated by the geometric mean of the modulus inside each phase. For the derivation and the detailed expressions of the parameters, please refer to the work of Pride (2005); Pride et al. (2004).

To show how the mesoscopic attenuation due to DP media impacts the seismic properties, we look for the modification of the P-wave velocity and attenuation. The medium is composed by little patches of high permeable and high porosity medium in a less permeable one. Following the work of Liu et al. (2009), we consider a sandstone with 3% sand inclusions. The complex moduli K_U , C and M are computed using the DP effective theory of Pride et al. (2004), leading to the P-wave velocity and attenuation with respect to the frequency. The results are compared to each single phase seismic properties results and to an effective single porosity medium results, where moduli are computed by harmonic averages. Figure 1 shows the P-wave velocity and attenuation (via the inverse of the quality factor) for the double porosity media (for the inclusion radius a equal to 1, 5 and 10 cm), for the single porosity effective medium and for the corresponding single phases media.

The P-wave velocity is much more dispersive for the double porosity media than for the single porosity media. At high frequency, the P-wave velocity in double porosity medium is much higher than for the equivalent single porosity medium. It shows two main changes at the relaxation frequencies of each phase, which are at the transition between the diffusive and the propagative regime of the Biot wave. It is worth noting that the size of inclusions a has a strong effect on the low frequency behaviour. We observe similar patterns for the P-wave attenuation (inverse of the quality factor). In double porosity medium, attenuation shows two main peaks, associated with the two phases, while the equivalent single poroelastic medium

produce only one single peak at high frequency. At low frequency (seismic frequencies), the attenuation is very high for the double porosity medium, leading to quality factors that are in good agreement with quality factors in geological materials. This pattern strongly depends on the size of the inclusions. On the other hand, attenuation produced by single phase medium is too low to be realistic. This means that the fluid flow at the boundaries between heterogeneities plays a fundamental role in the attenuation process, that cannot be neglected. These P-wave macro-characteristics will have a strong influence on the seismic waveforms.

Using a poroelastic theory is much more complex than an equivalent visco-elastic theory. However, modelling seismic waves with poroelastic theories take into account the mesoscopic attenuation induced by fluid equilibration at layer interfaces or heterogeneity boundaries, whereas a viscoelastic approach neglects this attenuation process. As shown by Pride et al. (2004), this is the most important attenuation process at low frequency. As the shallow subsurface has strong lateral and vertical heterogeneities, one should solve the full poroelastic theory to deal with attenuation.

3. Numerical modelling of seismic waves in porous media

3.1 Forward modelling solver

The model properties \mathbf{m} , which are the material parameters introduced in the previous section, are nonlinearly related to the seismic data \mathbf{d} via an operator f , i.e., $\mathbf{d} = f(\mathbf{m})$. The forward problem has been solved by many authors, using different methods. Analytical solutions have been derived for a homogeneous medium (Boutin et al.; 1987; Philippacopoulos; 1997). The response of porous layered medium has been computed using reflectivity methods in the frequency-wavenumber domain, such as the Kennett (1983) approach (De Barros and Dietrich; 2008; Pride et al.; 2002). This method was also used to solve the coupling between seismic and electromagnetic waves (Garambois and Dietrich; 2002; Haartsen and Pride; 1997). The poroelastic equations have been solved in 2D and 3D cases, mainly using finite difference schemes (Carcione; 1998; Dai et al.; 1995; Masson and Pride; 2010; O'Brien; 2010) in the time-space domain. For discretisation issues, the equations (1) should be decomposed in propagative and diffusive parts, that have to be solved independently (Carcione; 1998). Other time domain numerical schemes have been used, such as finite elements (Morency and Tromp; 2008) or finite volume (de la Puente et al.; 2008). Finally, Dupuy et al. (2011) solved this problem in the frequency domain using a discontinuous Galerkin approach. For a complete and precise review of the numerical modelling used to solve the poroelastic problem, we refer the reader to Carcione et al. (2010). In this paper, we will use three different techniques to illustrate our points:

- a 3D Finite Difference scheme (FD; O'Brien; 2010): The solutions of Biot's equations are obtained by fourth-order in space and second-order in time staggered-grid and rotated-staggered-grid methods. Stability of the methods and accuracy of the solutions have been carefully checked in the low-frequency domain.
- a reflectivity approach (SKB; De Barros and Dietrich; 2008; De Barros et al.; 2010): The 3D solution is obtained in the frequency-wavenumber domain for horizontally layered media by using the generalized reflection and transmission method of Kennett (1983). The

synthetic seismograms are finally transformed into the time-distance domain by using the 3D axisymmetric discrete wavenumber integration technique of Bouchon (1981).

- a Discontinuous Galerkin Method (DGM; Dupuy et al.; 2011): For 2 dimensions medium, the discrete linear system for the Biot theory has been deduced in the frequency domain for a discontinuous finite-element method, known as the nodal discontinuous Galerkin method. Solving this system in the frequency domain allows accurate modelling of the wave propagation for all frequencies.

The last two approaches are in the frequency domain, which has several advantages: 1) there is no need to decompose the problem into diffusive and propagative parts; 2) all frequencies, i.e., in the low- and high-frequency regimes, can be accurately treated; 3) solving more complex theories, such as double porosity or poroviscoelastic theories is straightforward and does not require any modifications of the solver; and 4) frequency domain has been shown to be the most efficient way to solve the Full waveform inverse problem, as the the solution has to calculated only for a few frequencies (Pratt et al.; 1998).

3.2 Seismic waveforms in poroelastic medium

As already stated, the main improvement of using poroelastic versus elastic theories is in the description of the attenuation from intrinsic medium parameters. Figure 2 gives an example of poroelastic and elastic data computed by equivalent finite difference codes (FD, O'Brien; 2010). The medium is a complex 200m thick reservoir embedded into a homogeneous half-space. The reservoir, modified from Manzocchi et al. (2008) is composed of 7 different facies, with different mineral and frame properties (see Fig. 2, top). In order to mimic a time lapse survey for CO₂ geological storage in a saline aquifer, a baseline is first computed for brine fully saturated medium. CO₂ is then injected in the center of the reservoir and spread out accordingly to the permeability, leading to areas containing gas of roughly 500 m and 2000 m diameter. The figure 2 presents the differential data (data with CO₂ in the reservoir minus baseline) for both gas extensions. The same modellings are run using equivalent elastic properties (computed through the Gassmann formulation). As the velocities are equal, phases of the elastic and poroelastic waves are the same. However, changes appear in amplitude, mainly in the multiple reflected waves and coda. The amplitude differences are up to 40% of the data. This stresses the importance of using attenuation in the forward modelling and inversion processes. Even if the Biot theory cannot explain the full range of attenuation, it leads to significant changes in the seismic waveforms.

Attenuation is due to the fluid movement. In the poroelastic theories, evidence for this is in the relative fluid-to-solid motion and in the existence of the slow P-wave. The figure 3 reproduce the experiment performed by Plona (1980). The modelling is made using the Discontinuous Galerking method (DGM) of Dupuy et al. (2011) and it is checked against the reflectivity approach (SKB) used by De Barros and Dietrich (2008). A P-wave is generated with an explosive source (central frequency of 200 Hz) in an quasi-elastic first layer (the Biot wave is entirely diffusive in this layer) and is transmitted and converted into S-wave and Biot wave at the interface with the second layer. Receivers are set into the second layer and record the three waves. Two cases are studied: 1) a low frequency case, where the source frequency is smaller than the cut-off frequency ($f_c = 6400$ Hz). The Biot wave, in this case, is

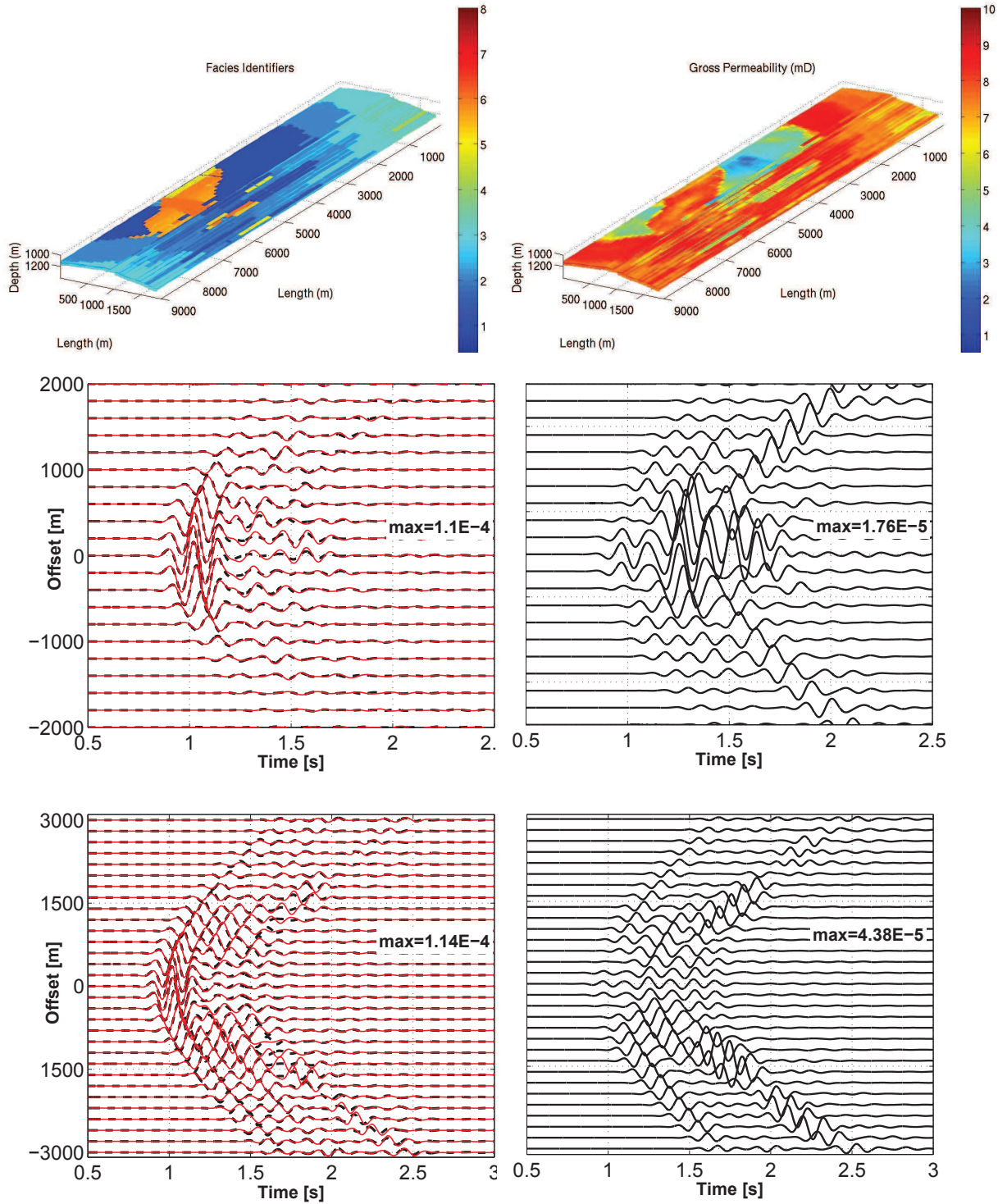


Figure 2: Example of poroelastic + elastic numerical modelling to mimic differential data for CO₂ storage. Top) Reservoir models (left: Facies, right: Permeability) used in the modelling, modified from Manzocchi et al. (2008). Elastic properties are computed using the Gassmann relationships from the porous parameters. Middle) Left: Differential seismograms (model with CO₂ minus baseline) for elastic (red) and poroelastic data (black), and right: differences between the elastic and poroelastic differential data. Bottom) Same as the middle panels, for a different extension of CO₂. Receivers and source are located on the free surface. The explosive source has a 8Hz Ricker wavelet signature.

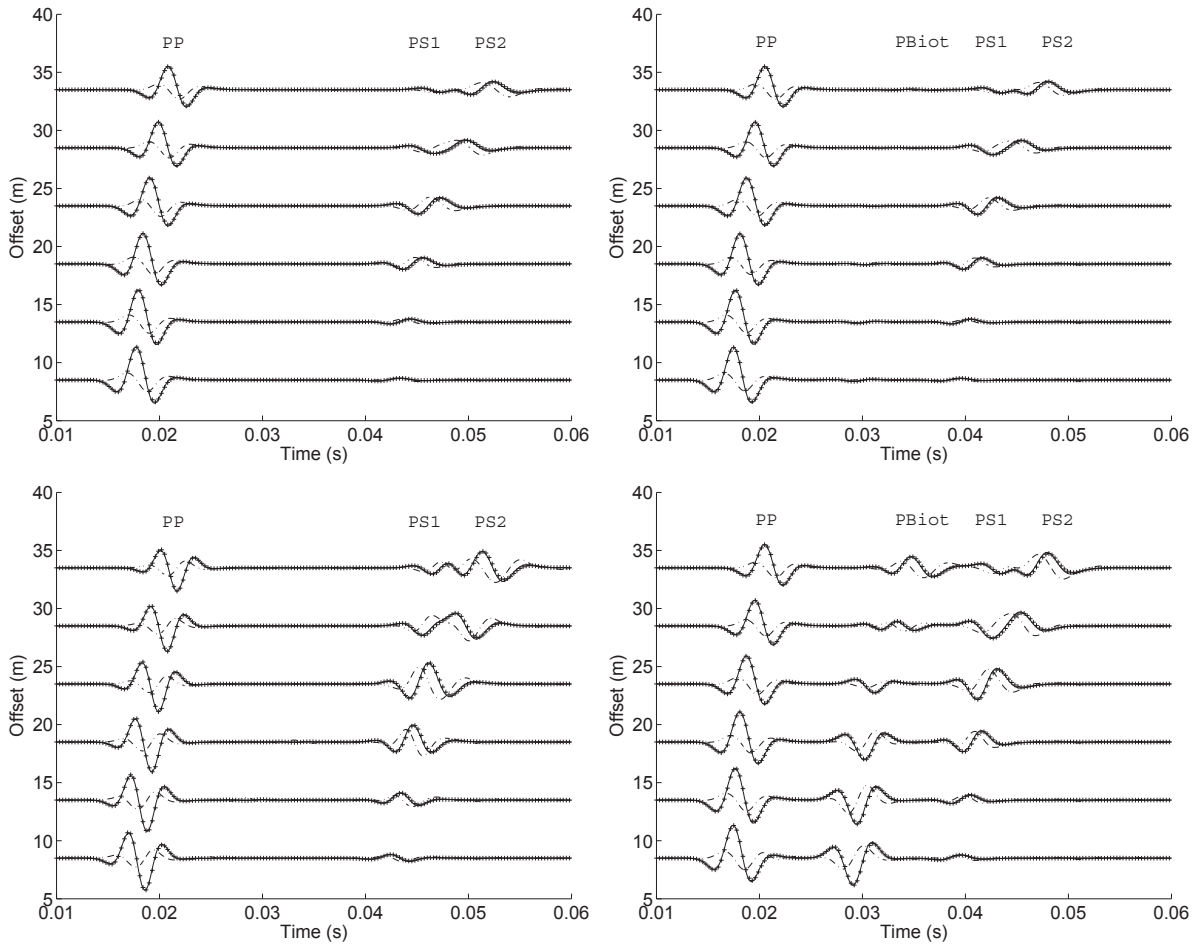


Figure 3: Flat interface case: Left) Seismograms of (top) vertical solid u_z , and (bottom) relative fluid/solid, displacement components w_z for the low-frequency regime; Right) Same in the high-frequency domain. The SKB solution is indicated by a continuous line and the DGM by crosses; dashed-dotted lines indicate differences between the two solutions (multiplied by a factor of 5). PP, PBiot and PS2 stand for the converted P, Biot and S waves, respectively, and PS1 stands for the conical wave associated with the direct P wave in the first layer. The two S waves, PS1 and PS2, are going to be uncoupled at far offset.

not propagative and cannot be seen; 2) a high frequency case, the source frequency is higher than the cut-off frequency ($f_c = 0.64$ Hz). This is obtained by decreasing the value of the fluid viscosity by 10000. The Biot wave becomes propagative, and can be observed, mainly in the fluid displacement data. In the seismograms of figure 3, the transmitted P-wave (PP), the conical wave associated with the P direct wave in the first layer (PS1), and the transmitted S-wave (PS2) are identified. These two S-waves (PS1 and PS2) are going to be uncoupled at further offsets. In the case of the propagative Biot wave, the transmitted Biot wave (PBiot) and the conical wave phases are still coupled, so the two waves are difficult to separate.

A similar case is studied in a double porosity medium. Taking the same source/receivers layout with an explosive source in the first layer constituted by a quasi-elastic sandstone and a line of receivers in the second layer composed by the double porosity medium described in the

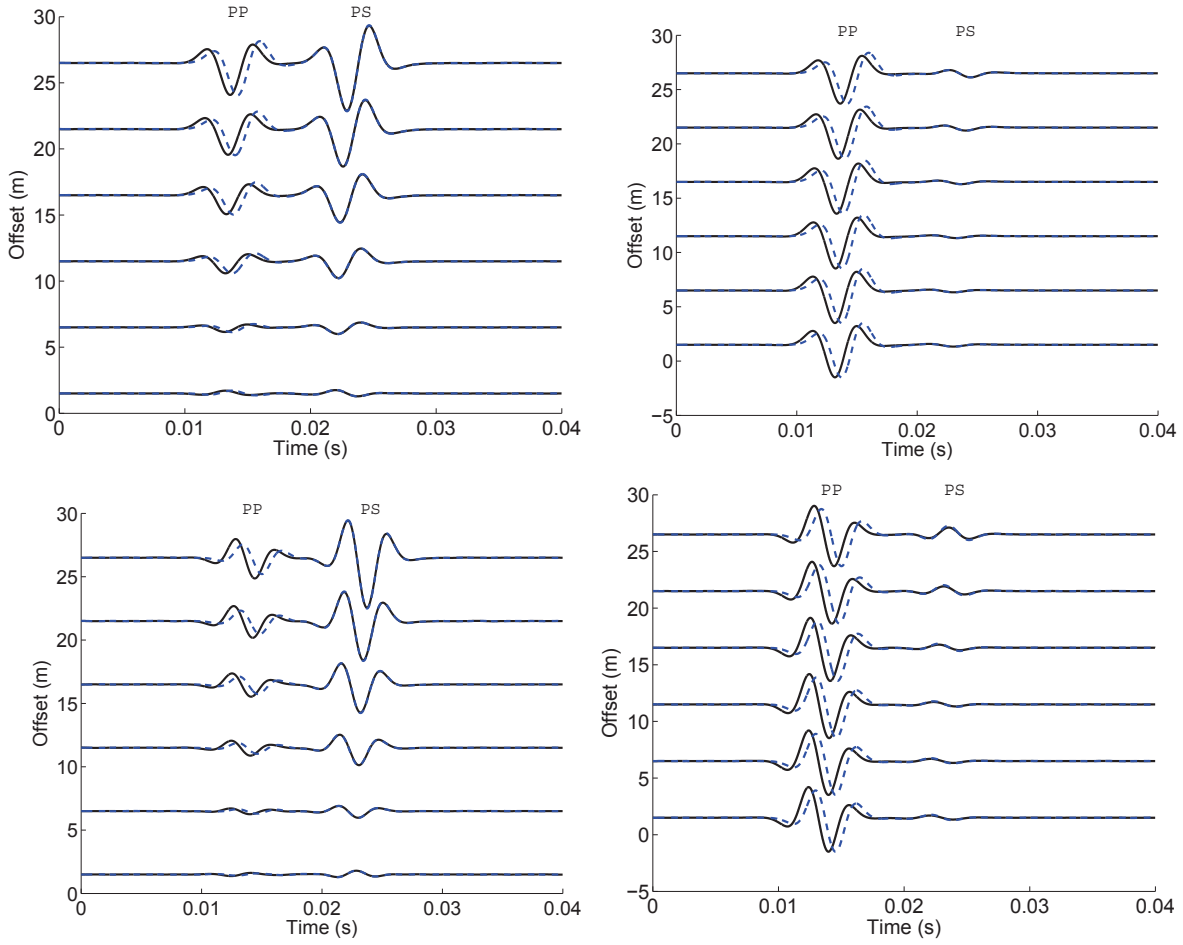


Figure 4: Double porosity case: seismograms of top) solid displacement u_x (left) and u_z (right) and bottom) relative fluid/solid displacements w_x (left) and w_z (right). The setup is the same as for figure 3, source is in a quasi-elastic layer, while receivers stand in a porous half space. The double porosity solution is indicated by a continuous black line and the effective single porosity by a dashed blue line. PP and PS stand for the converted P and S waves, respectively.

part 2.2 (sandstone with 3% of 1 cm spherical sand inclusions), we compute seismograms and we compare double porosity results and effective single porosity results. The seismograms of solid and relative fluid/solid displacements are given in Figure 4. The influence of the double porosity homogenization (via complex frequency dependent mechanic moduli) is clearly visible on the transmitted P-waves. Particularly, the waveforms are strongly distorted as the attenuation and dispersion are higher (see figure 1). As we are in the low frequency domain, the Biot waves are not visible in the seismograms, but they are responsible for the loss of seismic energy. As predicted by the theory, the converted S-waves are not impacted by the double porosity approach. In these examples, we have demonstrated the importance of taking into account complex poroelastic theories in order to understand and reproduce real seismic signals whose waveforms are strongly impacted by the presence of fluid and medium heterogeneities.

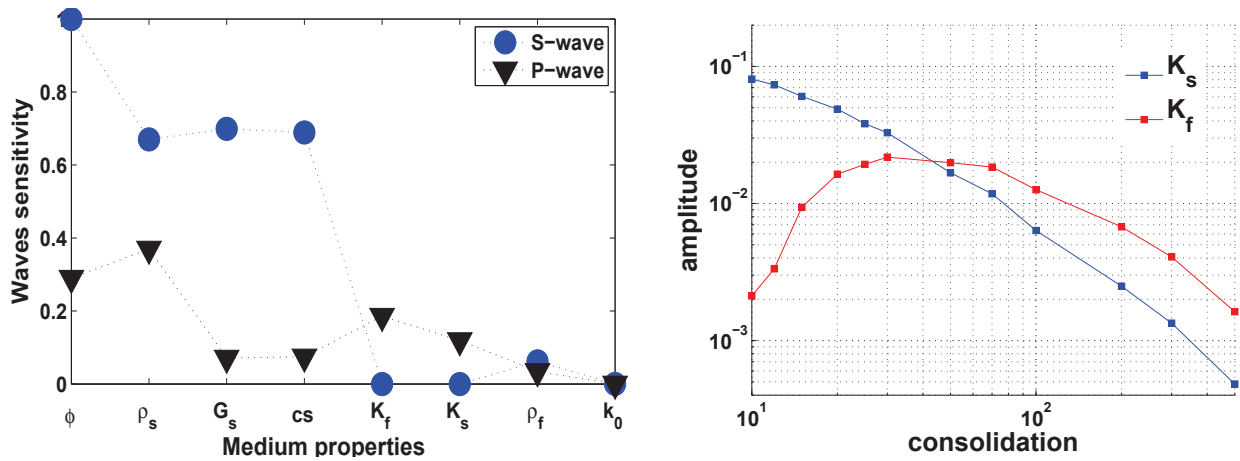


Figure 5: Sensitivity of the fluid and the mineral bulk modulus as a function of the consolidation. Sensitivity of the parameters for P and S waves

4. Sensitivity analysis

In the next sections, we use the reflectivity algorithm SKB (De Barros and Dietrich; 2008) and we focus on backscattered energy, i.e., we consider reflected seismic waves as in a seismic reflection experiment. We further assume that, whenever they exist, waves generated in the near surface (direct and head waves, surface and guided waves) are filtered out of the seismograms prior to the analysis. The assumption of plane-layered media is admittedly too simple to correctly describe the structural features of geological media, but it is nevertheless useful to explore the feasibility of an inversion process accounting for the rheology of porous media.

The sensitivity of the seismic waveforms to the model parameters is investigated for layered medium by computing the first-order derivatives of the seismic displacements with respect to the relevant poroelastic parameters. These operators, which are often referred to as the Fréchet derivatives, are expressed via semi-analytical formulas by using the Born approximation (De Barros and Dietrich; 2008). They can be readily and efficiently evaluated numerically because they are functions of the Green's functions of the unperturbed medium. In each layer, we consider the eight following quantities as model parameters: 1) the porosity ϕ , 2) the mineral bulk modulus K_s , 3) the mineral density ρ_s , 4) the mineral shear modulus G_s , 5) the consolidation parameter c_s , 6) the fluid bulk modulus K_f , 7) the fluid density ρ_f and 8) the permeability k_0 . This parameter set allows us to distinguish the parameters characterizing the solid phase from those describing the fluid phase. The fluid viscosity η is one of the input parameter but it is not considered in the inversion tests as its sensitivity is similar to the permeability.

Figure 5 (left) presents the sensitivity of the 8 parameters, for P and S waves. The sensitivity of the reflected wavefield varies drastically among the different parameters. We note that the reflected waves are especially sensitive to the mineral density ρ_s , porosity ϕ , shear modulus G_s and consolidation parameter cs . If we have some knowledge about the mineral properties

(i.e., G_s , K_s and ρ_s are fixed), the porosity ϕ and consolidation factor cs are the most sensitive parameters and therefore the key parameters to consider in an inversion procedure. On the other hand, the viscosity η and permeability k_0 have only a weak influence (10^4 times smaller than the porosity) on the wave amplitudes. The inversion for the parameters with such a low influence on the seismic waves will therefore be very delicate if other parameters are imperfectly known.

Figure 5 (right) shows the sensitivity of the P waves to the fluid modulus K_f and the mineral solid modulus. We note that the fluid modulus K_f has a stronger influence than the solid modulus K_s if the medium is poorly consolidated. The inverse is true for a consolidated medium. Similar patterns can be observed with the porosity: the higher the porosity, the more the fluid has an influence on the seismic waves. This means that it will be easier to determine fluid properties for an unconsolidated medium. For example, fluid substitution due to CO₂ injection leads to clear bright spot in Sleipner area (Norway, Arts et al.; 2004), where the medium is poorly consolidated. The same set-up in stiff rocks does not produce any clear images, like in Weyburn field (Canada, White; 2009)

To evaluate the coupling between parameters, we look at the Amplitude Versus Angle (AVA) curves in figure 6 for the PP (left) and SS (right) reflected waves due to a small and localized perturbation of a model parameter. We note that for some parameters, the model perturbations lead to similar modifications of the seismic response. For example, perturbations in densities and permeability show identical AVA responses. The same is true for the bulk moduli. This strong coupling between parameters will prevent simultaneously reconstruction of these parameters in an inversion process.

Morency et al. (2009) also investigate the sensitivity of the seismic waves in porous media. They determine finite-frequency kernels based upon adjoint methods. They investigate different parameter sets, in order to find the set that leads to the less coupling between parameters. They conclude that decomposing the input parameters into seismic velocities is the most stable approach in an inversion code.

5. Full waveform inversion

Full waveform inversion has shown to be an efficient and accurate tool to study the subsurface in the acoustic and elastic wave theory (Brossier et al.; 2009). Historically, most of the FWI methods (Lailly; 1983; Tarantola; 1984) have been implemented under the acoustic approximation, for 2D model reconstruction (e.g. Gauthier et al.; 1986; Pratt et al.; 1998) or 3D structures (for instance, Ben-Hadj-Ali et al.; 2008; Sirgue et al.; 2008). Applications to real data is even more recent (Hicks and Pratt; 2001; Operto et al.; 2006; Pratt and Shipp; 1999). The elastic case is more challenging, as the coupling between P and S waves leads to ill-conditioned problems. Since the early works of Mora (1987) and Kormendi and Dietrich (1991), the elastic problem has been addressed several times over the last years with methodological developments (Brossier et al.; 2009; Choi et al.; 2008; Gélis et al.; 2007).

Using a poroelastic theory makes the problem even more difficult, especially because it adds much more unknowns. To the best of our knowledge, the first attempt to solve this problem

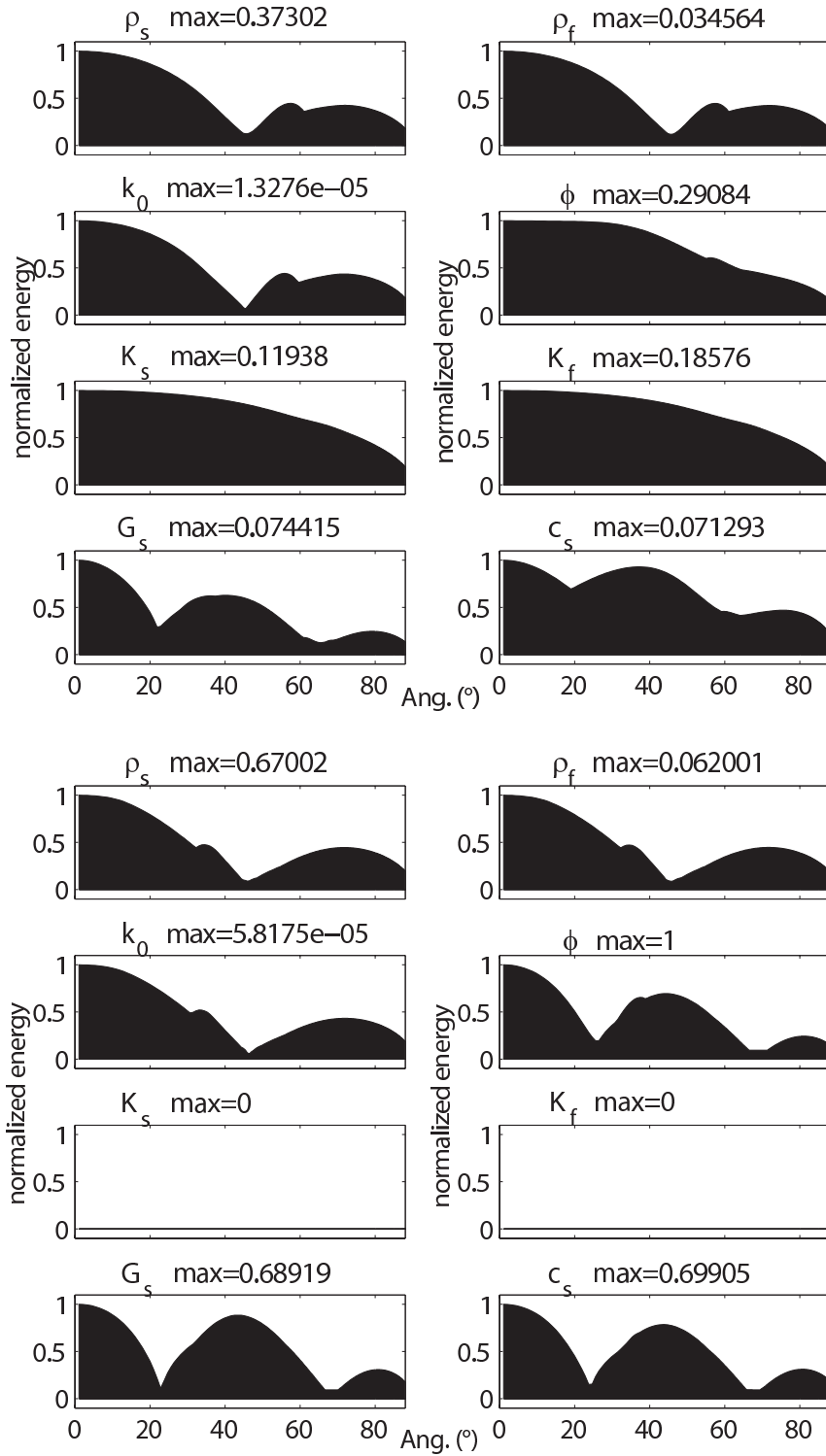


Figure 6: Energy of plane waves reflected from perturbations in ρ_s , ρ_f , k_0 , ϕ , K_s , K_f , G_s , and c_s , as a function of incidence angle. The eight upper panels and eight lower panels correspond to PP and SS reflections, respectively. The curves are normalized with respect to the maximum value indicated above each panel.

were made by De Barros and Dietrich (2008) and De Barros et al. (2010) for stratified media and by Morency et al. (2009) and Morency et al. (2011) in 3-dimensional media. In the following sections, we will describe the main results obtained from De Barros and Dietrich (2008) and De Barros et al. (2010).

5.1 Inversion algorithm

Our method to determine the intrinsic properties of porous media is based on a full waveform iterative inversion procedure. It is carried out with a gradient technique to infer an optimum model which minimizes a misfit function. The latter is defined by a sample-to-sample comparison of the observed data \mathbf{d}_{obs} with a synthetic wavefield $\mathbf{d} = \mathbf{f}(\mathbf{m})$ in the time-space domain, and by an equivalent term describing the deviations of the current model \mathbf{m} with respect to an a priori model \mathbf{m}_0 , i.e.,

$$S(\mathbf{m}) = \frac{1}{2} \|\mathbf{d} - \mathbf{d}_{obs}\|_D + \|\mathbf{m} - \mathbf{m}_0\|_M, \quad (6)$$

where the L2-norms $\|\cdot\|_D$ and $\|\cdot\|_M$ are defined in terms of a data covariance matrix C_D and an a priori model covariance matrix C_M (Tarantola; 1987). The model \mathbf{m} contains the description of one or several parameters in layers whose thicknesses are defined by the peak content of the data (Kormendi and Dietrich; 1991). The model is updated using a quasi-Newton algorithm, which involves the Fréchet derivatives obtained earlier. As this problem is strongly non-linear, several iterations are necessary to converge toward an optimum model \mathbf{m} , i.e, a model whose response \mathbf{d} satisfactorily fits the observed data \mathbf{d}_{obs} .

5.2 Numerical Results

In order to determine the accuracy of the inversion procedure for the different model parameters considered, we first invert for a single parameter, in this case the mineral density ρ_s , and keep the others constant. The true model to reconstruct and the initial model used to initialize the iterative inversion procedure (which is also the *a priori* model) are displayed in figure 7. The other parameters are assumed to be perfectly known. Their vertical distributions consist of four 250 m thick homogeneous layers. Parameters ϕ , c_s and k_0 decrease with depth while parameters ρ_f , K_s , K_f and G_s are kept strictly constant.

Vertical-component seismic data (labelled DATA, fig 8) are then computed from the true model for an array of 50 receivers spaced 20 metres apart at offsets ranging from 10 to 1000 metres from the source. The latter is a vertical point force whose signature is a perfectly known Ricker wavelet with a central frequency of 25 Hz. Source and receivers are located at the free surface. As mentioned previously, direct and surface waves are not included in our computations to avoid complications associated with these contributions. Figure 8 also shows the seismograms (labelled INIT) at the beginning of the inversion, i.e., the seismograms which are computed from the starting model. Figure 7 shows that the true model is very accurately reconstructed by inversion. As there are no major reflectors in the deeper part of the model, very little energy is reflected toward the surface, which leads to some minor reconstruction problems at depth. In figure 8, we note that the final synthetic seismograms (SYNT) almost perfectly fit the input data (DATA) as shown by the data residuals (RES) which are very small.

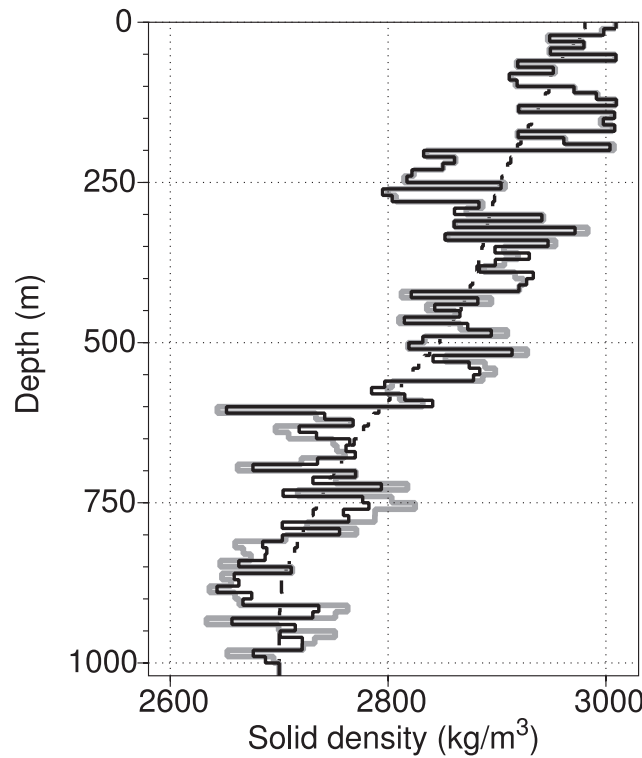


Figure 7: Models corresponding to the inversion for the mineral density ρ_s : initial model, which is also the *a priori* model (dashed line), true model (thick grey line), and reconstructed model (black line). The corresponding seismograms are shown in figure 8.

The inversions carried out for the ϕ , ρ_f , K_s , K_f , G_s and c_s parameters (not shown) exhibit the same level of accuracy. However, as predicted by De Barros and Dietrich (2008) and Morency et al. (2009) with two different approaches, the weak sensitivity of the reflected waves to the permeability does not allow us to reconstruct the variations of this parameter. Being related to seismic wave attenuation and fluid flow, permeability appears as not only the most difficult parameter to estimate but also the one which would have the greatest benefits to the characterization of porous formations, notably in the oil industry (Pride et al.; 2003). One possibility to estimate it is to measure the fluid motion, or, by reciprocity, to use fluid sources.

As observed in the sensitivity study, parameters are strongly coupled. Multiparameter inversion is thus an ill-posed problem, which is, in most of the cases, not reliable, as errors on one parameter will map into the reconstruction of the other parameter. The use of analytical expressions for the sensitivity kernels allows an easy rearrangement of the parameter sets, in order to invert for the most pertinent parameters. Using some *a priori* information, it is then possible to efficiently decrease the number of parameters to reconstruct. For example, there is no point to invert for both fluid parameters ρ_f and K_f , if we know that pores are filled by either gas or water. It is much more efficient to invert only for the saturation rate.

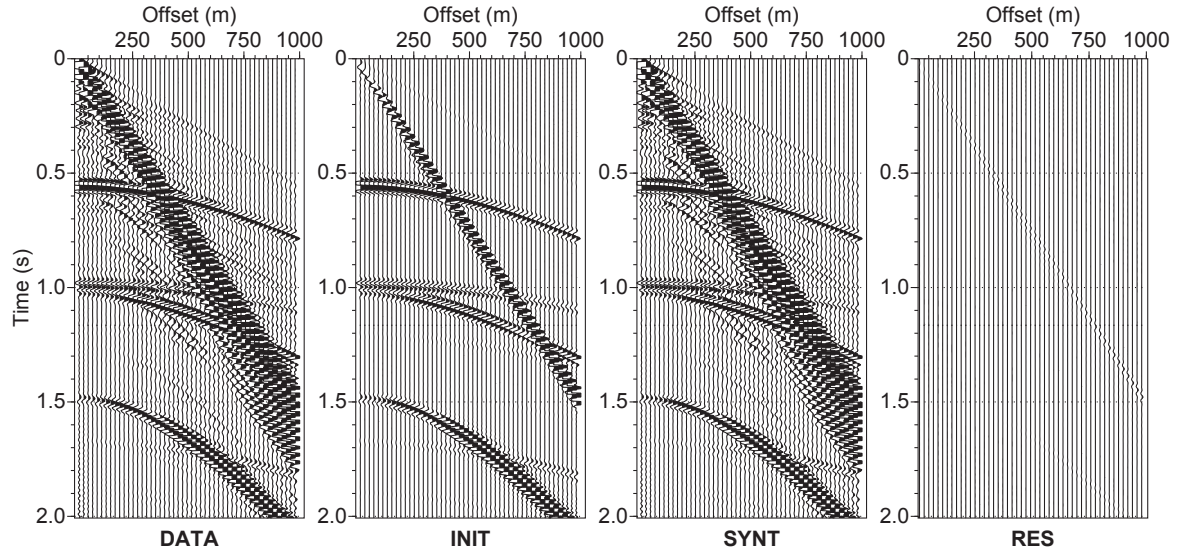


Figure 8: Seismograms corresponding to the inversion for the mineral density ρ_s : synthetic data used as input (DATA), seismograms associated with the initial model (INIT), seismograms obtained at the last iteration (SYNT), and data residuals (RES) computed from the difference between the DATA and SYNT sections for the models depicted in figure 7. For convenience, all sections are displayed with the same scale, but the most energetic signals are clipped.

5.3 Differential inversion

To reduce the ambiguities of multiparameter inversion, a differential inversion has been considered and implemented (De Barros et al.; 2010). Instead of dealing with the full complexity of the medium, we concentrate on small changes in the subsurface properties such as those occurring over time in underground fluid-filled reservoirs. This approach may be particularly useful for time-lapse studies to follow the extension of fluid plumes or to assess the fluid saturation as a function of time.

For example, the monitoring of CO₂ underground storage sites mainly aims at mapping the CO₂ extension. Time lapse studies performed over the Sleipner CO₂ injection site in the North Sea (see e.g. Arts et al.; 2004) highlight the variations of fluid content as seen in the seismic data after imaging and inversion. In this fluid substitution issue, the parameter of interest is the saline water/carbon dioxide relative saturation. A differential inversion process will allow us to free ourselves from the unknown model parameters. This approach is valid for any type of fluid substitution monitoring problem, such as water-table variation, gas and oil extraction or hydrothermal activity.

The first step in this approach is to perform a base or reference survey to estimate the solid properties before the fluid substitution occurs. When performing a multiparameter inversion, the model properties are poorly reconstructed in general. However, the seismic data are reasonably well recovered. Thus, in spite of its defects, the reconstructed model respects the wave kinematics of the input data. In other words, the inverted model provides a description of the solid earth properties which can be used as a starting model for subsequent inversions. The latter would be used to estimate the fluid variations within the subsurface from a series of

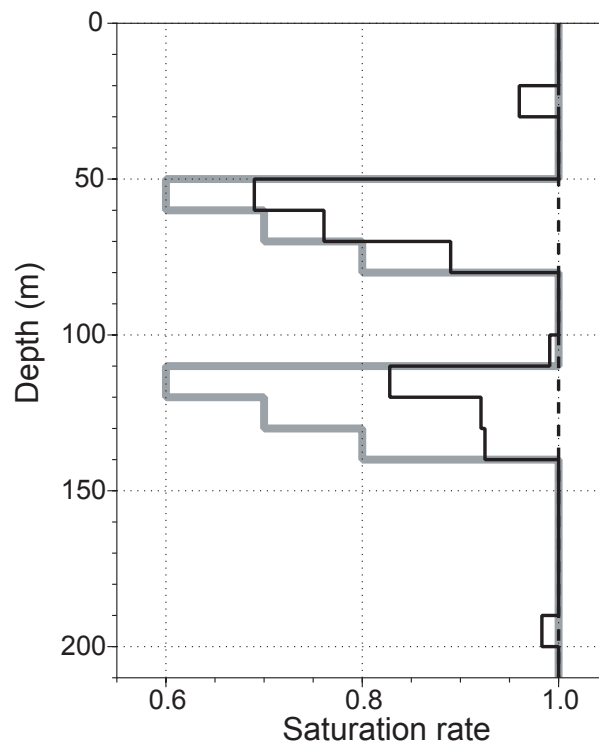


Figure 9: Models corresponding to the differential inversion for the water saturation S_r : Initial model (dashed line), true model (thick grey line), and reconstructed model (black line).

monitor surveys (second step). To test this concept, we perform an inversion for two strongly coupled parameters, namely the porosity and the consolidation parameter. The resulting models are then used as starting models. We perturb the fluid properties of the true model to simulate a fluid variation over time. Two 30-metre thick layers located between 50 and 80 metres depth and between 110 and 140 metres depth are water depleted due to gas injection. The water saturation then varies between 60 and 80% in these two layers (figure 9). Our goal is to estimate the fluid properties by inverting the seismic data for the water saturation.

The model obtained is displayed in figure 9. We see that the location and extension of the gas-filled layers are correctly estimated. The magnitude of the water saturation curve, which defines the amount of gas as a function of depth, is somewhat underestimated in the top gas layer but is nevertheless reasonably well estimated. In the bottom gas layer, the inversion procedure only provides a qualitative estimate of the water saturation. These computations show that the differential inversion approach is capable of estimating in reasonably good quality the variations of fluid content in the subsurface without actually knowing the full properties of the medium.

6. Conclusion

Using a poroelastic theory is much more complex than an elastic or a visco-elastic theory. However, poroelastic theories are an attempt to quantitatively describe the attenuation processes from the physical properties of the geological material. Furthermore, at seismic frequencies, attenuation is dominated by the mesoscopic scale mechanism, involving fluid

flow at the boundaries of any heterogeneities. Poroelastic theories intrinsically take into account this loss of energy, while the equivalent visco-elastic approach neglects it. As the near surface media are strongly heterogeneous, with strong lateral and vertical contrasts, and different fluids involved, one has to deal with full poroelastic theories to accurately consider attenuation and fluid-solid motions.

The sensitivity to the different parameters varies hugely among parameters, and parameters are strongly coupled. Using a poroelastic theory to reconstruct model properties is in its nature an ill-conditioned problem. It shows however very promising possibility for differential inversion, and for certain issues where the problems can be reduced to the determination of only few parameters.

Poroelastic theories are, of course, not perfect yet, as they fail to give an universal law to explain seismic wave attenuation and propagation. They are however the direction to go if one wants to use full waveform inversion to make quantitative imagery of the rock physics and subsurface fluids. In particular, the permeability is a key parameter for exploration; the reconstruction of such a parameter from seismic waves will necessarily require the use of complex poroelastic theories. Development in this direction still has to be continued. In particular, for imagery problems, data have to be improved to get around the problems of coupling between parameters. This can be done by using the information carried by fluid motions, which can give new insight into the permeability and the fluid properties, or by exploring in deeper details the coupling between seismic and electromagnetic waves.

7. Acknowledgements

L. De Barros and G. S. O'Brien were partly funded by the department of Communications, Energy and Natural Resources (Ireland) under the National Geosciences programme 2007-2013. B. Dupuy, S. Garambois and J. Virieux are supported by the National Research Agency (ANR) "Captage et Stockage de CO₂" program (ANR-07-PCO2-002). The numerical computations were performed by using the computational facilities from SFI/HEA ICHEC (Ireland), the HPC national computer centers (France, CINES and IDRIS under the allocation 2010-046091 GENCI) and the HPC center of the Grenoble observatory (OSUG).

8. References

- Arts, R., Eiken, O., Chadwick, A., Zweigel, P., des Meer, L. V. and Zinszner, B. (2004). Monitoring of CO₂ injected at Sleipner using time-laps seismic data., *Energy* **29**: 1323–1392.
- Auriault, J.-L., Borne, L. and Chambon, R. (1985). Dynamics of porous saturated media, checking of the generalized law of Darcy, *J. Acoust. Soc. Am.* **77**(5): 1641–1650.
- Ben-Hadj-Ali, H., Operto, S. and Virieux, J. (2008). Velocity model-building by 3-D frequency-domain, full waveform inversion of wide aperture seismic data, *Geophysics* **73**(5): 101–117.
- Biot, M. (1956). Theory of propagation of elastic waves in a fluid-saturated porous solid. I. Low-frequency range, II. Higher frequency range, *J. Acoust. Soc. Am.* **28**: 168–191.
- Bouchon, M. (1981). A simple method to calculate Green's functions for elastic layered media, *Bull. Seism. Soc. Am.* **71**(4): 959–971.
- Boutin, C., Bonnet, G. and Bard, P. (1987). Green functions and associated sources in infinite and stratified poroelastic media, *Geophys. J. Roy. Astr. Soc.* pp. 521–550.

- Brossier, R., Operto, S. and Virieux, J. (2009). Seismic imaging of complex onshore structures by 2D elastic frequency-domain full-waveform inversion, *Geophysics* **74**(6): 63–76.
- Carcione, J. (1998). Viscoelastic effective rheologies for modelling wave propagation in porous media, *Geophysical Prospecting* **46**: 249–270.
- Carcione, J. M., Morency, C. and Santos, J. E. (2010). Computational poroelasticity - a review, *Geophysics* **75**: A229–A243.
- Choi, Y., Min, D.-J. and Shin, C. (2008). Two-dimensional waveform inversion of multi-component data in acoustic-elastic coupled media, *Geophysical Prospecting* **56**(19): 863–881.
- Dai, N., Vafidis, A. and Kanasewich, E. (1995). Wave propagation in heterogeneous porous media: A velocity-stress, finite-difference method, *Geophysics* **60**(2): 327–340.
- De Barros, L. and Dietrich, M. (2008). Perturbations of the seismic reflectivity of a fluid-saturated depth-dependent poroelastic medium, *J. Acoust. Soc. Am.* **123**(3): 1409–1420.
- De Barros, L., Dietrich, M. and Valette, B. (2010). Full waveform inversion of seismic waves reflected in a stratified porous medium, *Geophy. J. Int.* **182**(3): 1543–1556.
- de la Puente, J., Dumbser, M., Käser, M. and Igel, H. (2008). Discontinuous galerkin methods for wave propagation in poroelastic media., *Geophysics* .
- Dupuy, B., De Barros, L., Garambois, S. and Virieux, J. (2011). Wave propagation in heterogeneous porous media formulated in the frequency-space domain using a discontinuous galerkin method, *Geophysics* **76**: N13–N21.
- Garambois, S. and Dietrich, M. (2002). Full waveform numerical simulations of seismoelectromagnetic wave conversions in fluid-saturated stratified porous media, *J. Geophys. Res.* **107**(B7): 2148–2165.
- Gassmann, F. (1951). Über die elastizität poröser medien, *Vierteljahrsschrift der Naturforschenden Gesellschaft in Zürich* **96**: 1–23.
- Gauthier, O., Virieux, J. and Tarantola, A. (1986). Two dimensionnal nonlinear inversion of seismic waveforms: numerical results, *Geophysics* **51**: 1387–1403.
- Geertsma, J. and Smith, D. (1961). Some aspects of elastic wave propagation in fluid-saturated porous solid, *Soc. Pet. Eng. J.* **26**: 235–248.
- Gélis, C., Virieux, J. and Grandjean, G. (2007). Two-dimensional elastic full waveform inversion using Born and Rytov formulations in the frequency domain, *Geophy. J. Int.* **168**(2): 605–633.
- Gurevich, B., Zyrianov, V. and Lopatnikov, S. (1997). Seismic attenuation in finely layered porous rocks: Effects of fluid flow and scattering, *Geophysics* **62**(1): 319–324.
- Haartsen, M. and Pride, S. (1997). Electro seismic waves from point sources in layered media, *J. Geophys. Res.* **102**(B11): 745–769.
- Hicks, G. and Pratt, R. (2001). Reflection waveform inversion using local descent methods: Estimating attenuation and velocity over a gas-sand deposit, *Geophysics* **66**: 598–612.
- Johnson, D. (2001). Theory of frequency dependent acoustics in patchy-saturated porous media, *J. Acoust. Soc. Am.* **110**(2): 682–694.
- Johnson, D., Koplik, J. and Dashen, R. (1987). Theory of dynamic permeability and tortuosity in fluid-saturated porous media, *Journal of Fluid Mechanics.* **176**: 379–402.
- Johnson, D., Plona, T. and Kojima, H. (1994). Probing porous media with first and second sound. I. dynamic permeability., *Journal of Applied Physics* **76**(1): 104–125.
- Kennett, B. (1983). *Seismic Wave Propagation in Stratified Media*, number 342 p, Cambridge University Press, Cambridge.

- Kormendi, F. and Dietrich, M. (1991). Nonlinear waveform inversion of plane-wave seismograms in stratified elastic media, *Geophysics* **56**(5): 664–674.
- Korringa, J., Brown, R., Thompson, D. and Runge, R. (1979). Self-consistent imbedding and the ellipsoidal model for porous rocks, *J. Geophys. Res.* **84**: 5591–5598.
- Lailly, P. (1983). The seismic inverse problem as a sequence of before stack migrations, in J. B. Bednar, R. Redner, E. Robinson and A. Weglein (eds), *Conference on Inverse Scattering: Theory and Application*, Soc. Industr. Appl. Math.
- Liu, X., Greenhalgh, S. and Zhou, B. (2009). Transient solution for poro-viscoacoustic wave propagation in double porosity media and its limitations, *Geophy. J. Int.* **178**: 375–393.
- Manzocchi, T., Carter, J. N., Skorstad, A., Fjellvoll, B., Stephen, K. D., Howell, J., Matthews, J. D., Walsh, J. J., Nepveu, M., Bos, C., Cole, J., Egberts, P., Flint, S., Hern, C., Holden, L., Hovland, H., Jackson, H., Kolbjornsen, O., MacDonald, A., Nell, P., Onyeagoro, K., Strand, J., Syversveen, A. R., Tchistiakov, A., Yang, C., Yielding, G. and Zimmerman, R. (2008). Sensitivity of the impact of geological uncertainty on production from faulted and unfaulted shallow marine oil reservoirs - objectives and methods, *Petroleum Geoscience* **14**: 3–15.
- Masson, Y. and Pride, S. (2010). Finite-difference modeling of Biot's poroelastic equations across all frequencies, *Geophysics* **75**(2): 33–41.
- Mavko, G. and Jizba, D. (1991). Estimating grain-scale fluid effects on velocity dispersion in rocks, *Geophysics* **56**: 1940–1949.
- Mora, P. (1987). Nonlinear two-dimensional elastic inversion of multioffset seismic data, *Geophysics* **52**: 1211–1228.
- Morency, C., Luo, Y. and Tromp, J. (2009). Finite-frequency kernels for wave propagation in porous media based upon adjoint methods, *Geophy. J. Int.* **179**(2): 1148–1168.
- Morency, C., Luo, Y. and Tromp, J. (2011). Acoustic, elastic and poroelastic simulations of CO₂ sequestration crosswell monitoring based on spectral-element and adjoint methods, *Geophy. J. Int.* **185**(2).
- Morency, C. and Tromp, J. (2008). Spectral-element simulations of wave propagation in porous media, *Geophy. J. Int.* **175**(1): 301–345.
- O'Brien, G. (2010). 3D rotated and standard staggered finite-difference solutions to Biot's poroelastic wave equations: Stability condition and dispersion analysis, *Geophysics* **75**(4).
- Operto, S., Virieux, J., Dessa, J. X. and Pascal, G. (2006). Crustal-scale seismic imaging from multifold ocean bottom seismometer data by frequency-domain full-waveform tomography: application to the eastern Nankai trough, *J. Geophys. Res.* **111**: B09306.
- Philippacopoulos, A. (1997). Buried point source in a poroelastic half-space, *J. Engineering Mechanics* **123**(8): 860–869.
- Plona, T. (1980). Observation of a second bulk compressional wave in a porous medium at ultrasonic frequencies, *Appl. Phys. Lett.* **36**(4): 259–261.
- Pratt, R., Shin, C. and Hicks, G. (1998). Gauss-Newton and full Newton methods in frequency-space seismic waveform inversion, *Geophy. J. Int.* **133**: 341–362(22).
- Pratt, R. and Shipp, R. (1999). Seismic waveform inversion in the frequency domain, part II: Fault delineation in sediments using crosshole data, *Geophysics* **64**(3): 902–914.
- Pride, S. (2005). *Relationships between seismic and hydrological properties*, Water Science and Technology Library, Springer, chapter 8, pp. 253–284.
- Pride, S. and Berryman, J. (2003a). Linear dynamics of double-porosity dual-permeability materials, i. governing equations and acoustic attenuation, *Physical Review E*

- 68: 1–211.
- Pride, S. and Berryman, J. (2003b). Linear dynamics of double-porosity dual-permeability materials, ii. fluid transport equations, *Physical Review E* **68**: 1–211.
- Pride, S., Berryman, J. and Harris, J. (2004). Seismic attenuation due to wave-induced flow, *J. Geophys. Res.* **109**(B01201).
- Pride, S., Gangi, A. and Morgan, F. (1992). Deriving the equations of motion for porous isotropic media, *J. Acoust. Soc. Am.* **92**(6): 3278–3290.
- Pride, S., Harris, J., Johnson, D., Mateeva, A., Nihei, K., Nowack, R., Rector, J., Spetzler, H., Wu, R., Yamamoto, T., Berryman, J. and Fehler, M. (2003). Permeability dependence of seismic amplitudes, *The Leading Edge* **22**: 518–525.
- Pride, S., Tromeur, E. and Berryman, J. (2002). Biot slow-wave effects in stratified rock, *Geophysics* **67**: 1–211.
- Santos, J. E., Douglas, J., Corbero, J. and Lovera, O. M. (1990). A model for wave propagation in a porous medium saturated by a two-phase fluid, *J. Acoust. Soc. Am.* **87**(4): 1439–1448.
- Santos, J. E., Ravazzoli, C. L. and Geiser, J. (2006). On the static and dynamic behavior of fluid saturated composite porous solids: A homogenization approach, *International Journal of Solids and Structures* **43**(5): 1224 – 1238.
- Sirgue, L., Etgen, J. and Albertin, U. (2008). 3D frequency domain waveform inversion using time domain finite difference methods, *Extended Abstracts, 70th EAGE Conference & Exhibition, Rome*, number F022.
- Tarantola, A. (1984). The seismic reflection inverse problem, in *Inverse Problems of Acoustic and Elastic Waves*, SIAM, Philadelphia, pp. 104–181.
- Tarantola, A. (1987). *Inverse Problem Theory: Methods for data fitting and model parameter estimation*, Elsevier, Amsterdam.
- White, D. (2009). Monitoring CO₂ storage during EOR at the Weyburn-Midale Field, *The Leading Edge* **28**(7): 838–842.

